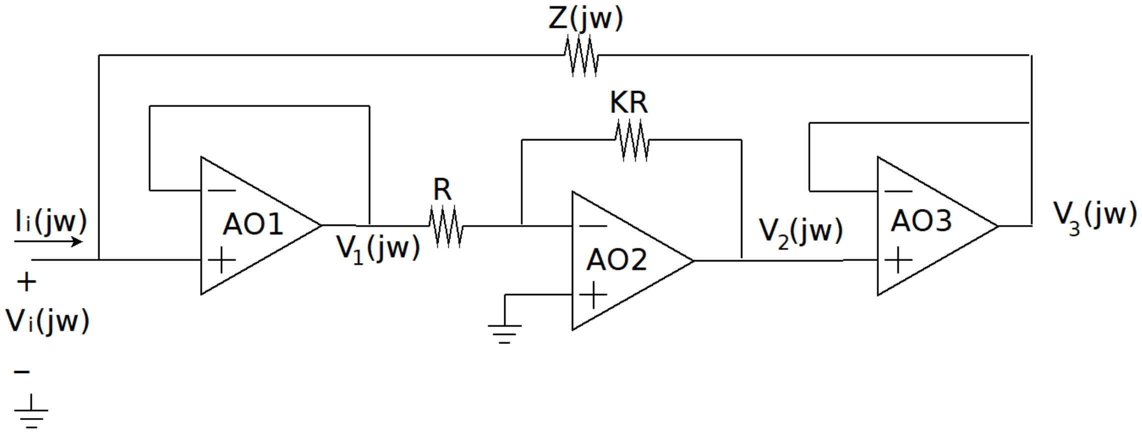
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2023

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) Hallar la impedancia vista desde la entrada $Z_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{I_i(j\omega)}$. (**Se sugiere fuertemente identificar bloques** y explicar bien cómo trabaja con los operacionales).

(b) Se tiene ahora que $K = 9$, la entrada es $v_i(t) = \sqrt{2}\ 230V. \cos(100\pi t)$ y Z es el paralelo de una resistencia R y una inductancia L.

  i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por el circuito a la fuente.

  ii) Compensar la potencia reactiva, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

(c) Se considera el circuito en régimen sinusoidal de 50Hz, donde las fuentes forman un sistema trifásico equlibrado y perfecto de 230V eficaces. La carga es un triángulo de impedancias idénticas, de valor $3Z_v$ hallada en la parte a).

  i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por la carga trifásica.

  ii) Compensar la potencia reactiva total, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

  iii) ¿Cambia en algo su respuesta a la parte c-ii) si se pide que la compensación de reactiva se haga colocando componentes del menor valor posible?

Problema 2

Se considera un circuito de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_n.(s - 10\omega_n)}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2}$$

(a) ¿Qué condición debe cumplir la constante real ζ para que el denominador de $H(s)$ tenga dos raíces complejas conjugadas?

A partir de ahora, se considera $\zeta = 1/6$.

(b) Deducir y graficar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, realizando un análisis por bandas. **Explicar claramante cómo procede. En particular, explicar con detalle cómo deduce el diagrama de fase**.

(c) Hallar $H(j\omega_n)$ y $H(j10\omega_n)$ y ubicarlos en los diagramas de Bode asintóticos hallados y bosquejar los diagramas reales.

(d) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el circuito responde, en régimen, con un **retraso** de exactamente 45^o? **Explicar claramente la respuesta**.

(e) Utilizando la tabla de transformadas de Laplace, hallar la respuesta completa del circuito a un escalón de amplitud E.

Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2023

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Enunciar y demostrar el Teorema de Miller.

Pregunta 2

Enunciar el Teorema de Blondel para sistemas trifásicos y demostrarlo para el caso de cargas en estrella.

Pregunta 3

(a) Definir la potencia media para un régimen de funcionamiento peridódico (no necesariamente sinusoidal), de periodo τ.

(b) Deducir, a partir de la definición anterior, las siguientes expresiones para la potencia media de una componente funcionando en régimen sinusoidal:

$$P = V_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi) = re[V\bar{I}]$$

donde V_{eff} e I_{eff} son, respectivamente, los valores eficaces de la tensión y la corriente y V e I son, respectivamente, los fasores de tensión y corriente.

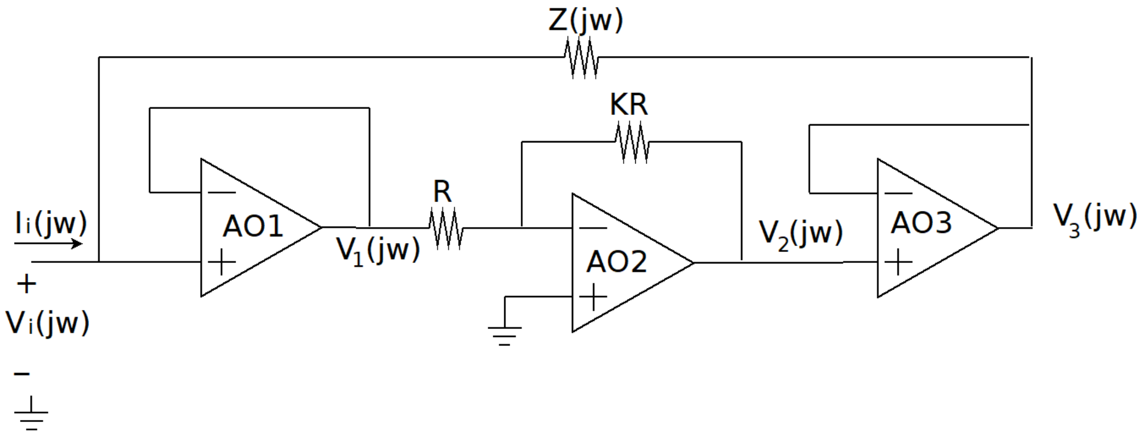
Pregunta 4

A partir de las propiedades de la transformada de Laplace para funciones generalizadas, deducir un modelo en Laplace de un inductor con dato previo no nulo.

Solución

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) Hallar la impedancia vista desde la entrada $Z_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{I_i(j\omega)}$. (**Se sugiere fuertemente identificar bloques** y explicar bien cómo trabaja con los operacionales).

Los operacionales est"an realimentados por la pata menos y operan en zona lineal. La idealidad de la resistencia de entrada infinita implica que tenemos no entra corriente por las patas de entrada y,debido a la ganancia infinita, tenemos el cortocircuito virtual de las entradas. AO1 y AO3 están en uvna configuración de seguidor, por lo que $V_1 = V_i$ y $V_2 = V_3$. El AO2 está en una configuración inversora, de ganancia $-K$.

La corriente I_i se va toda por la impedancia Z, por lo que podemos escribir:

$$I_i = \frac{V_i - V_3}{Z} = \frac{V_i - V_2}{Z} = \frac{V_i + KV_i}{Z} = \frac{1+K}{Z}.V_i$$

Entonces

$$Z_v = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z}{1+K}$$

(b) Se tiene ahora que $K = 9$, la entrada es $v_i(t)\sqrt{2}\ 230V.\cos(100\pi t)$ y Z es el paralelo de una resistencia R y una inductancia L.

i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por el circuito a la fuente.

Definimos $\omega = 100\pi$ y notemos que

$$Z_v = \frac{1}{10}.(R||Lj\omega)$$

Entonces, la potencia activa que el circuito le consume a la fuente es la que consume la resistencia $R/10$. Sea V_i el fasor de tensión de entrada, expresado en valores eficaces:

$$P = \frac{|V_i|^2}{\frac{R}{10}} = \frac{10 \times 230^2}{R}W$$

De manera análoga, la potencia reactiva la consume la inductancia $L/10$ y va a ser positiva:

$$Q = \frac{|V_i|^2}{\frac{L\omega}{10}} = \frac{10 \times 230^2}{L\omega}VAR$$

ii) Compensar la potencia reactiva, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Dado que la impedancia Z_v es inductiva, compensamos la reactiva colocando un condensador C_C que entregue la misma reactiva que consume Z_v. Para no alterar la activa y no abrir el circuito, colocamos el condensador en paralelo, es decir, viendo la tensón de entrada. Entonces

$$Q_C = -|V_i|^2 C\omega = -Q \Rightarrow C = \frac{Q}{|V_i|^2\omega} = \frac{1}{|V_i|^2\omega}.\frac{10|V_i|^2}{L\omega} = \frac{10}{L\omega^2}$$

(c) Se considera el circuito en régimen sinusoidal de 50Hz, donde las fuentes forman un sistema trifásico equlibrado y perfecto de 230V eficaces. La carga es un triángulo de impedancias idénticas, de valor $3Z_v$ hallada en la parte a).

i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por la carga trifásica.

Lo más sencillo acá es transfigurar el triángulo a estrella, obtener el equivalente monofásico y ahí calcular las potencias activa y reactiva. Al transfigurar, se obtiene una estrella equivalente conformada por tres impedancias idénticas, de valor Z_v. Esto implica que el equivalente monofásico es exactamente el circuito de las partes a) y b). Entonces, la potencia del equivalente monofásico es la que ya calculamos, y la potencia trifásica es el triple:

$$P_T = 3 \times \frac{10 \times 230^2}{R} W \quad , \quad Q_T = 3 \times \frac{10 \times 230^2}{L\omega} VAR$$

ii) Compensar la potencia reactiva total, indicando qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Para compensar la reactiva total, vemos primero el equivalente monofásico. Por la parte b), sabemos que podemos colocar un condensador de valor C_C en paralelo con la carga. Al *volver* del equivalente monofásico al sistema trifásico, lo que obtenemos es una estrella de condensadores de valor C_C en paralelo con el triángulo original, es decir, conectada directamente a las líneas que conectan la fuente con el triángulo.

iii) ¿Cambia en algo su respuesta a la parte c-ii) si se pide que la compensación de reactiva se haga colocando componentes del menor valor posible?

La estrella de condensadores de valor C_C que diseñamos en la parte anterior compensa la reactiva trifásica. Si la transfiguramos, obtenemos un triángulo formado por tres impedancias idénticas ters veces más grandes que las originales, que aporta la misma potencia reactiva, por lo que también compensa la reactiva de la fuente. Al ser la impedancia el triple de la original, tenemos que

$$3.\frac{1}{C_C j\omega} = \frac{1}{\frac{C_C}{3} j\omega}$$

por lo que el triángulo tendrá tres condensadores idénticos, tres veces más chicos que los que habría que poner si se compensara con una estrella.

Problema 2

Se considera un circuito de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_n.(s - 10\omega_n)}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2}$$

(a) ¿Qué condición debe cumplir la constante real ζ para que el denominador de $H(s)$ tenga dos raíces complejas conjugadas?

Las raíces del denominador se obtienen de la identidad:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \frac{\omega_n}{2}.\left(-2\zeta \pm \sqrt{4\zeta^2 - 4}\right)$$

Para que halla dos raíces complejas conjugadas, se debe cumplir que

$$4\zeta^2 < 4 \Rightarrow \zeta^2 < 1 \Rightarrow -1 < \zeta < 1$$

A partir de ahora, se considera $\zeta = 1/6$.

(b) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, realizando un análisis por bandas. **Explicar claramante cómo procede. En particular, explicar con detalle cómo deduce el diagrama de fase**.

Consideremos la transferencia, evaluada en $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n.(j\omega - 10\omega_n)}{(j\omega)^2 + 2.\zeta.\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Hacemos un análisis por bandas. Tengamos presente que vamos a analizar la respuesta en frecuencia considernado solamente ω positivo, ya que para los valores negativos, tenemos el mismo módulo $H(j\omega)$, con fase opuesta. Para definir las bandas de anális, tenemos que encontrar las frecuencias críticas, es decir, las raíces del numerador y del denominador de $H(j\omega)$, y ordenarlas por módlo creciente, para luego ir moviendo ω desde la continua hasta infinito.

En el denominador, como ζ cumple la condición deducida en la parte a), tenemos dos raíces complejas conjugadas, de módulo ω_n. En el numerador, tenemos la raíz $10\omega_n$.

Entonces tenemos tres bandas:

$$\omega \ll \omega_n$$

$$\omega_n \ll \omega \ll 10\omega_n$$

$$\omega \gg 10\omega_n$$

En cada banda hacemos la aproximación asintótica. Un término simple, del tipo $(j\omega - 10\omega_n)$ lo aproximamos por su parte real, $-10\omega_n$, para frecuencias menores que $10\omega_n$ y por $j\omega$ para frecuencias mayores que $10\omega_n$. Para el caso de un teérmino de segundo orden con raíces complejas conjugadas, las altas y bajas frecuencias están definidas por el módulo de las raíces y se aproximan por el término independiente en baja frecuencia y por el término cuadrático en alta frecuencia.

Entonces:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n.(-10\omega_n)}{\omega_n^2} = -10 \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(10)\, dB = 20\, dB \\ arg(H) & \approx & 180^o \end{cases}$$

El argumento de H siempre está definido a menos de traslaciones múltiplos de 2π. En baja frecuencia anclamos el diagrama a una determinada fase inicial, consisten con el an'alisis. En este caso, como en baja frecuencia tenemos un número negativo, elegimos la fase 180^o.

$$\omega_n \ll \omega \ll 10\omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n.(-10\omega_n)}{(j\omega)^2} = 10\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20dB + 40\log(\omega_n) - 40\log\omega\, dB \\ arg(H) & \approx & 0\ (ó \pm 360^o) \end{cases}$$

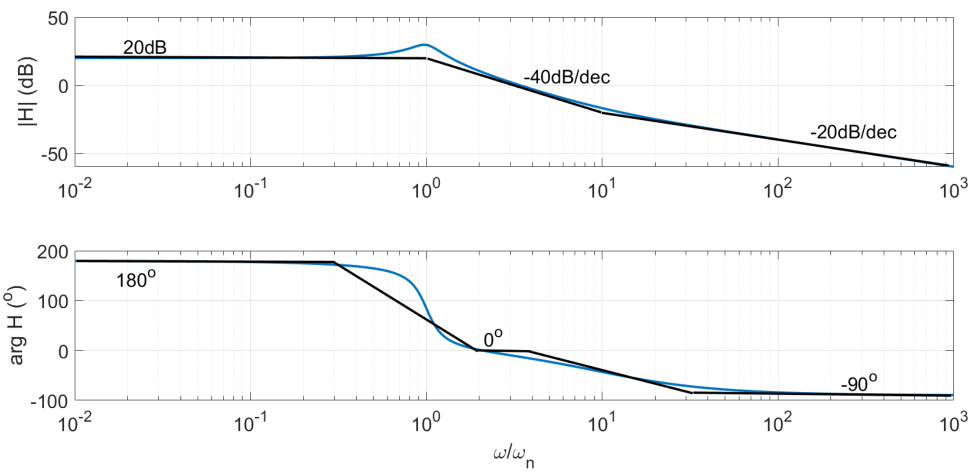
$$10\omega_n \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{\omega_n.(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n}{j\omega} \Longrightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(\omega_n) - 20\log\omega \, dB \\ arg(H) & \approx & +270^o \, (\acute{o} - 90^o) \end{cases}$$

Desde el punto de vista del módulo, tenemos una respuesta plana en baja frecuencia, luego una banda intermedia con una caía de $-40dB/dec$ y finalmente una banda de alta recuencia con una caída de $-20dB/dec$. Para el caso de la fase, en baja frecuencia tenemos una fase de 180^o. Para ajustar bien la fase de la banda intermedia, observamos que el cambio entre la banda de baja frecuencia y banda intermedia se debe a las raíces complejas conjugadas del denominador, por lo que la variacón de fase puede ser de $\pm 180^o$, es decir, podemos ir hacia 360^o o bajar hacia 0^o (llegando al mismo valor asintótico). Para distinguir si la fase adelanta o atrasa, evaluamos en un punto intermedio. Elegimos evaluar en la frecuencia crítica ω_n:

$$H(j\omega_n) = \frac{\omega_n.(j\omega_n - 10\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{j-10}{2j\zeta} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & \frac{\sqrt{101}}{2\zeta} \approx 30 \\ arg(H) & \approx 84^o \end{cases}$$

Entonces, la fase comienza como u número negativo y luego se acerca a un número positivo, conparte imaginaria positiva, es decir, que la fase disminuye desde 180^o hacia 0^o. Al movernos hacia la tercera banda, la fase solamente puede variar en $\pm 90^o$, ya que el efecto se debe a un término de primer orden (el del numerador). Es decir que desde 0^o, podríamos ir hacia $+90^o$ o hacia -90^o (módulo 360^o). Si juntamos esta información con el análisis que hicimos de la tercera banda, nos quedamos con la opción de -90^o (*el camino corto*).

La siguiente figura resume el análisis asintótico. También se muestran en azul los diagramas reales. Hay que tener presente que el diagrama de fase lo dibujamos continuo, para reflejar lo que pasa en la realidad[a]



(c) Hallar $H(j\omega_n)$ y $H(j10\omega_n)$ y ubicarlos en los diagramas de Bode asintóticos hallados.

Ya vimos que

$$H(j\omega_n) = \frac{j-10}{2j\zeta} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & \frac{\sqrt{101}}{2\zeta} \approx 30 \approx 29,5dB \\ arg(H) & \approx 84^o \end{cases}$$

Por otro lado

$$H(j10\omega_n) = \frac{\omega_n.(j10\omega_n - 10\omega_n)}{(j10\omega_n)^2 + 2.\zeta.\omega_n(j10\omega_n) + \omega_n^2} = \frac{(j10-10)}{-100 + 20j.\zeta + 1} = \frac{(j10-10)}{-99 + 20j.\zeta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 0,14 \approx 30 \approx -17dB \\ arg(H) & \approx -43^o \end{cases}$$

Estos valores son consistentes con los diagramas asintóticos deducidos antes.

[a] El diagrama de fase es discontinuo solamente cuando hay raíces del numerador o del denominador imaginarias puras, que corresponde al caso de términos de segundo orden con $\zeta = 0$.

(d) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el circuito responde, en régimen, con un retraso de exactamente 45^o? **Explicar claramente la respuesta**.

Un circuito lineal de transferencia $H(s)$ responde en régimen sinunsoidal, ante una entrada de la forma

$$v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con una señal también sinusoidal, de la misma frecuencia, y con una amplitud y fase distintas, moduladas por el módulo y el argumento de la transferencia evaluadas en la frecuencia de trabajo:

$$v_{o,reg}(t) = A.|H(j\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t + \varphi + arg\, H(j\omega_0)\right)$$

Entonces, para responder la pregunta, debemos buscar una frecuencia de trabajo a la cual el argumento de H sea cercano a -45^o, ya que estamos buscando un retraso de ese valor. Dada la continuidad de la fase, y su pasaje desde 180^o a -90^o, es claro que va a existir una frecuencia de trabajo a la cual se cumple lo pedido. También va a existir una frecuencia a la cual se da un adelanto de 45^o, pero eso no es lo que se pide.

(e) Utilizando la tabla de transformadas de Laplace, hallar la respuesta completa del circuito a un escalón de amplitud E.

La respuesta completa, en Laplace, va atener la expresión:

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = \frac{\omega_n.(s - 10\omega_n)}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2}.\frac{E}{s}$$

O sea:

$$V_o(s) = E\omega_n \frac{1}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2} - 10E\omega_n^2.\frac{1}{s(s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Antitransformamos directamente usando la tabla de transformadas de Laplace, identificando con cuidado los parámetros necesarios:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2} \leftrightarrow Y(t).\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2)} \leftrightarrow Y(t)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + atan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)\right]$$

Entonces

$$V_o(s) = \frac{E}{\omega_n}\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2} - 10E.\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2.\zeta.\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Entonces

$$v_o(t) = Y(t).\frac{E}{\sqrt{1-\zeta^2}}.e^{-\zeta\omega_n t}\left[\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + 10\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + atan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)\right] - 10Y(t).E$$