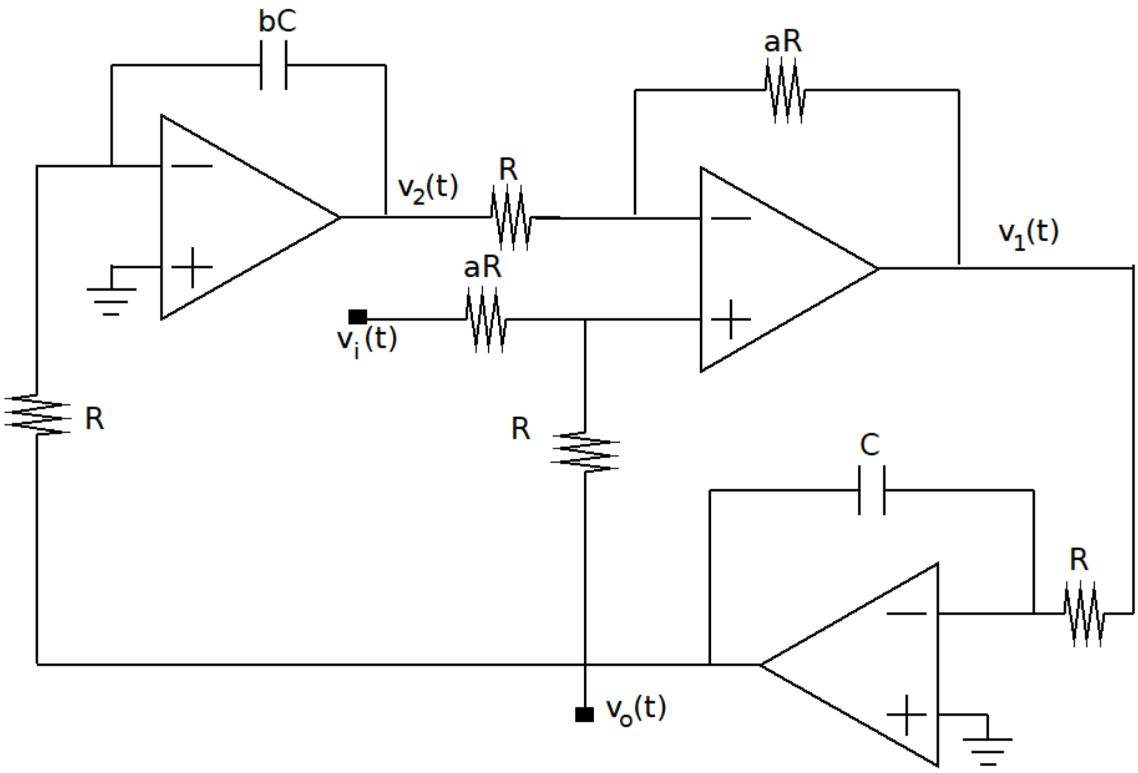
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2022

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. (**Se sugiere fuertemente identificar bloques**).

ii) Verificar que se puede escribir así:

$$H(s) = -\frac{bRCs}{a + abRCs + bR^2C^2s^2}$$

iii) Se sabe que $b = \frac{2}{5}$. Se define $\omega_1 = \frac{1}{RC}$. Hallar $a > 0$ tal que el sistema presente un factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Encontrar la respectiva frecuencia natural. Estos valores se mantendrán hacia adelante.

(b) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente su deducción y construcción. Indicar las frecuencias críticas y cómo analiza la respuesta en frecuencia.

(c) Mostrar que existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el fasor de la salida es paralelo al fasor de entrada. **Justificar debidamente e indicar la relación de tamaño entre estos dos fasores**.

Problema 2

a) Se considera un circuito de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\omega_1}{s+\omega_1}$. Se inyecta la entrada $v_i(t) = Y(t).E\sin(\omega_0 t)$ $\left(V_i(s) = \frac{E\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right)$.

  i) Mostrar que la transformada de Laplace de la salida puede escribirse como

$$V_o(s) = K.\left[\frac{A}{s+\omega_1} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega_0^2}\right]$$

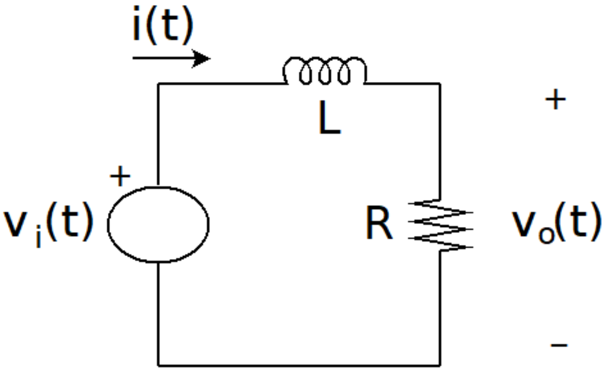
  hallando las constantes K, A, B y C.

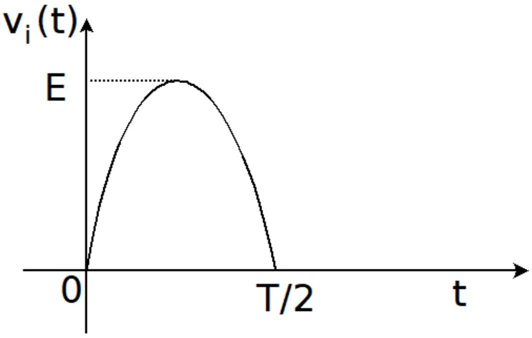
  ii) Hallar $v_o(t)$.

b) Se considera el circuito de la figura de la izquierda, con un dato previo en la inductancia igual a i_0. Se inyecta la señal que se muestra en la figura de la derecha, que vale

$$v_i(t) = \begin{cases} E\sin(\omega_0 t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Se pretende resolver por tramos.

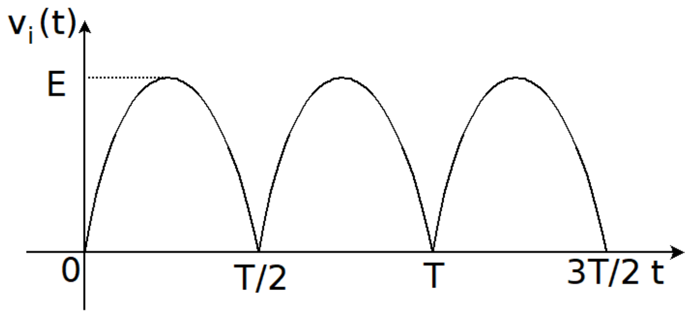




  i) Hallar la expresión temporal de la salida $v_o(t)$ para el tramo $[0, T/2]$. **Se sugiere aplicar superposicón y relacionarlo con la parte a)!!!**

  ii) Hallar la expresión de la salida $v_o(t)$ para el tramo $t \geq T/2$.

  iii) Hallar el valor que debería tener i_0 para que el circuito arranque en régimen, si se aplica la entrada periódica de periodo $T/2$ de la figura de abajo.



Teoría de Circuitos

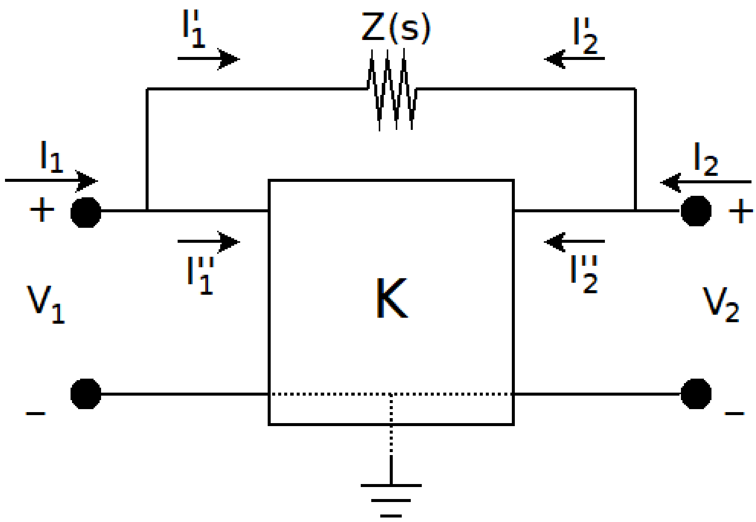
Examen de diciembre de 2022

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se tiene el circuito de la figura, donde $K(s)$ es la ganancia:

$$K(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$



En este contexto, enunciar y demostrar el Teorema de Miller, explicitando claramente las hipótesis y dónde se usan en la prueba.

Pregunta 2

(a) Dibujar el circuito denominado Schmitt Trigger.

(b) Explicar el funcionamiento del circuito ante una entrada sinunsoidal pura, discutiendo según la amplitud de la misma.

Pregunta 3

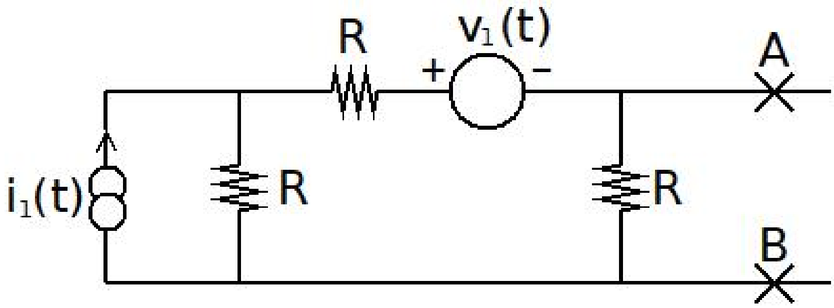
Se considera una componente con tensión en bornes $v(t)$ y corriente $i(t)$, medidas de la forma estándar.

(a) Definir la potencia instantánea $p(t)$ y la potencia media en régimen sinusoidal P.

(b) A partir de la definición anterior, probar la expresión $P = re(V\bar{I})$, siendo V e I los fasores asociados a la tensión y la corriente, en valores eficaces.

Pregunta 4

Se considera el circuito de la figura, con las fuentes independientes $v_1(t)$ e $i_1(t)$.

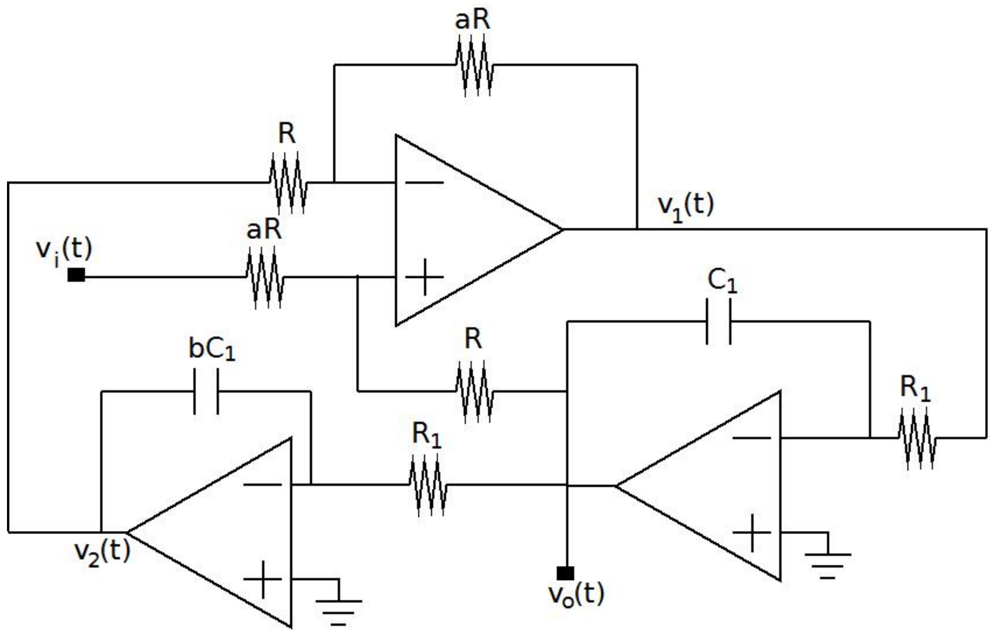


Explicar qué es el equivalente de Thévenin y hallarlo para este circuito entre los puntos A y B, en función de R, $v_1(t)$ e $i_1(t)$. Explicar claramente cómo procede.

Solución

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.



(a) i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. (**Se sugiere fuertemente identificar bloques**).

Para hallar la transferencia, pasamos al circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos. Como los operacionales son ideales, no entra corriente por las patas + y - (por la impedancia de entrada infinita) y tenemos además el cortocircuito virtual de ambas patas (por la ganancia infinita). Observemos que los operacionales de abajo están en una configuración inversora que implementa un integrador. Tenemos que

$$\frac{V_o(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{R_1C_1s} \quad , \quad \frac{V_2(s)}{V_o(s)} = -\frac{1}{R_1bC_1s}$$

Obtenemos entonces que

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{bR_1^2C_1^2s^2}$$

En el operacional de arriba, sabemos que $e^+ = e^-$. Aplicamos superposición:

$$e^+(s) = \left(\frac{R}{(a+1)R}\right)V_i(s) + \left(\frac{aR}{(a+1)R}\right)V_o(s) = \frac{V_i(s)}{a+1} + \frac{aV_o(s)}{a+1}$$

$$e^-(s) = \left(\frac{aR}{(a+1)R}\right)V_2(s) + \left(\frac{R}{(a+1)R}\right)V_1(s) = \frac{aV_2(s)}{a+1} + \frac{V_1(s)}{a+1}$$

Igualando, obtenemos

$$\frac{V_i(s)}{a+1} + \frac{aV_o(s)}{a+1} = \frac{aV_2(s)}{a+1} + \frac{V_1(s)}{a+1} \Rightarrow V_i(s) + aV_o(s) = aV_2(s) + V_1(s)$$

Eliminando V_1 y V_2, resulta

$$V_i(s) + aV_o(s) = -\frac{aV_o(s)}{bR_1C_1s} - R_1C_1sV_o(s) \Rightarrow V_i(s) = -\left[a + \frac{a}{bR_1C_1s} + R_1C_1s\right]V_o(s)$$

Entonces

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{bR_1C_1s}{a + abR_1C_1s + bR_1^2C_1^2s^2}}$$

ii) Verificar que se puede escribir así:

$$H(s) = -\frac{bRCs}{a + abRCs + bR^2C^2s^2}$$

Ya hecho.

iii) Se sabe que $b = \frac{2}{5}$. Se define $\omega_1 = \frac{1}{RC}$. Hallar $a > 0$ tal que el sistema presente un factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Encontrar la respectiva frecuencia natural. Estos valores se mantendrán hacia adelante.

Observemos que podemos escribir $H(s)$ así:

$$H(s) = -\frac{bR_1C_1s}{a + abR_1C_1s + bR_1^2C_1^2s^2} = -\frac{bR_1C_1s}{bR_1^2C_1^2\left(\frac{a}{bR_1^2C_1^2} + \frac{abR_1C_1}{bR_1^2C_1^2}s + s^2\right)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{R_1C_1}s}{s^2 + \frac{a}{R_1C_1}s + \frac{a}{bR_1^2C_1^2}} = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{a}{b}\omega_1^2} = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{5a}{2}\omega_1^2}$$

Queremos que el denominador de $H(s)$ sea de la forma

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} a\omega_1 &= 2\zeta\omega_n \\ \frac{5a}{2}\omega_1^2 &= \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\omega_1 &= 2\zeta\left(\sqrt{\frac{5a}{2}}\right)\omega_1 \\ \Rightarrow & a = 2\zeta\left(\sqrt{\frac{5a}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{\frac{5a}{2}}\right) = \sqrt{2a} \end{cases}$$

De la identidad $a^2 = 2a$ obtenemos $a = 0$ (lo descartamos) y $\boxed{a = 2}$ y $\boxed{\omega_n = \sqrt{5}\omega_1}$. Por lo tanto,

$$H(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n s + \omega_n^2}$$

(b) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente su deducción y construcción.

$$H(j\omega) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Hacemos un análisis por bandas. La única frecuencia crítica es ω_n.

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\omega_n(j\omega)}{\omega_n^2} = -\frac{j\omega}{\sqrt{5}\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H| &\approx 20\log(\omega) - 20\log(\sqrt{5}\omega_n)\, dB \\ arg(H) &\approx -90^o \end{cases}$$

Notar que no es necesario idiscutir acá si la fase es -90^o ó $+270^o$, ya que es nuestra referencia de arranque en baja frecuencia.

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{5}(j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |H| &\approx 20\log(\omega_n) - 20\log(\sqrt{5}\omega)\, dB \\ arg(H) &\approx +90^o\ (-270^o) \end{cases}$$

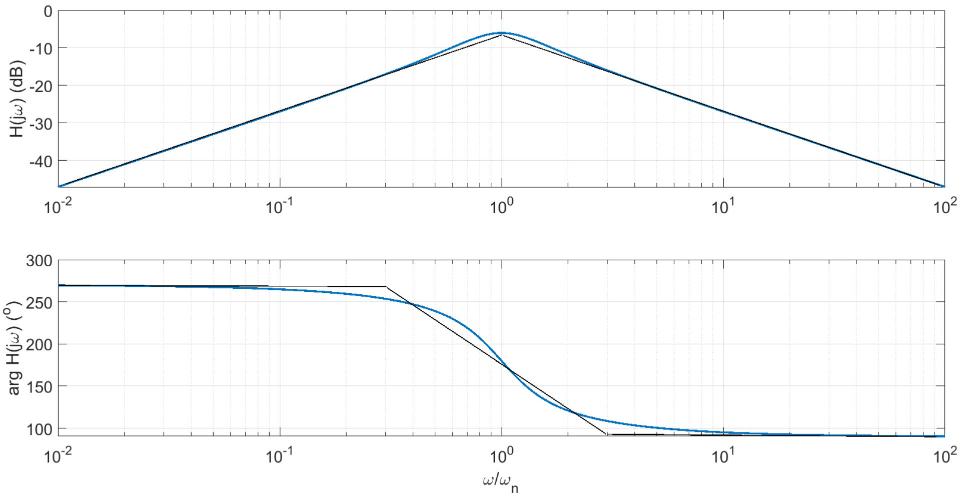
El denominador aporta $\pm 180^o$. Para resolver si sube o baja, evaluamos en la frecuencia natural:

$$H(j\omega_n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\omega_n(j\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{j}{\frac{2j}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}$$

por lo que fase decrece desde -90^o hacia -270^o. La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.

(c) Mostrar que existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el fasor de la salida es paralelo al fasor de entrada. **Justificar debidamente e indicar la relación de tamaño entre estos dos fasores**.

Sabemos que en régimen sinusoidal, ante una entrada de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,



el sistema responde con $v_{o.reg}(t) = A|A(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \varphi + arg(H(j\omega_0)))$. Como queremos que los respectivos fasores sean paralelos, se debe cumplir que

$$arg\,[H(j\omega_0)] = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observando el diagrama de fase, vemos que la fase varía continuament e decreciendo desde 270^o hacia 90^o, por lo que pasará por 180^o. Además, por haber evaluado en ω_n, sabemos que es a condición se cumple para $\omega_0 = \omega_n$. Del cálculo de $H(j\omega_n)$ obtenemos que el tamaño del fasor de salida es la mitad del de la entrada.

Problema 2

a) Se considera un circuito de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\omega_1}{s+\omega_1}$. Se inyecta la entrada $v_i(t) = Y(t).E\sin(\omega_0 t)$ $\left(V_i(s) = \frac{E\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right)$.

i) Mostrar que la salida puede escribirse como

$$V_o(s) = K.\left[\frac{A}{s+\omega_1} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega_0^2}\right]$$

hallando las constantes K, A, B y C.

Por la definición de la transferencia, sabemos que se cumple que

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = \frac{E\omega_1}{s+\omega_1}.\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

La descomposión buscada corresponde a las fracciones simples, teniendo en cuenta que hay una raíz real $(-\omega_1)$ y dos raíces imaginarias conjugadas $(\pm j\omega_0)$. Para hallar las constantes pedidas, hacemos común denominador en la descomposición e igualamos:

$$V_o(s) = \frac{E\omega_1\omega_0}{(s+\omega_1).(s^2+\omega_0^2)} = K.\frac{As^2 + A\omega_0^2 + Bs^2 + Bs\omega_1 + Cs + C\omega_1}{(s+\omega_1).(s^2+\omega_0^2)}$$

$$= K.\frac{(A+B)s^2 + (B\omega_1 + C)s + A\omega_0^2 + C\omega_1}{(s+\omega_1).(s^2+\omega_0^2)}$$

Identificamos los coeficientes de las distintas potencias de s en el numerador, obtenemos $K = E\omega_1\omega_0$ y:

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ B\omega_1 + C &= 0 \\ A\omega_0^2 + C\omega_1 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{\omega_1^2+\omega_0^2} \\ B &= -\frac{1}{\omega_1^2+\omega_0^2} \\ C &= \frac{\omega_1}{\omega_1^2+\omega_0^2} \end{cases}$$

ii) Hallar $v_o(t)$.

De lo anterior, podemos escribir:

$$V_o(s) = \frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\left[\frac{1}{s+\omega_1} - \frac{s}{s+\omega_0^2} + \frac{\omega_1}{s+\omega_0^2}\right] = \frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\left[\frac{1}{s+\omega_1} - \frac{s}{s+\omega_0^2} + \frac{\omega_1}{\omega_0}.\frac{\omega_0}{s+\omega_0^2}\right]$$

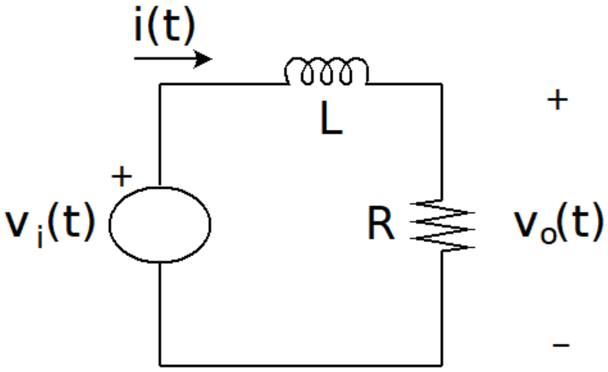
Pasando al tiempo:

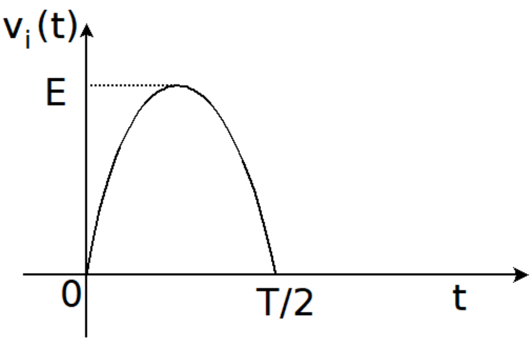
$$v_o(t) = Y(t).\frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\left[e^{-\omega_1 t} - \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_1}{\omega_0}.\sin(\omega_0 t)\right]$$

b) Se considera el circuito de la figura de la izquierda, con un dato previo en la inductancia igual a i_0. Se inyecta la señal que se muestra en la figura de la derecha, que vale

$$v_i(t) = \begin{cases} E\sin(\omega_0 t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

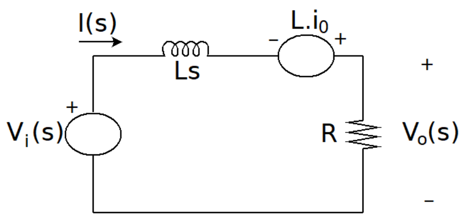
con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Se pretende resolver por tramos.





i) Hallar la expresión temporal de la salida $v_o(t)$ para el tramo $[0, T/2]$. **Se sugiere aplicar superposicón y relacionarlo con la parte a)!!!**

Consideremos el circuito equivalente en Laplace, donde incorporamos el modelo del dato previo.



Al haber dos fuentes, podemos aplicar superposición. Primero anulamos la fuente correspondiente al dato previo ($i_0 = 0$). Observemos que en este tramo la entrada puede pensarse como $E\sin(\omega_0 t)$. Aplicando el divisor de tensión, obtenemos

$$V_o(s) = \frac{R}{Ls+R}.V_i(s) = \frac{R/L}{s+R/L}.\frac{E\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Definiendo $\omega_1 = R/L$, podemos escribir:

$$V_o(s) = \frac{\omega_1}{s+\omega_1}.\frac{E\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

y estamos exactamente en la situación de la parte a). Por lo tanto, la parte de la salida correspondiente a la entrada vale:

$$v_{o,input}(t) = Y(t).\frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\left[e^{-\omega_1 t} - \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_1}{\omega_0}.\sin(\omega_0 t)\right]$$

Ahora anulamos la entrada y consideramos solaente el dato previo i_0. Nuevamente tenemos el divisor de tensión (notar que pueden intercambiarse la bobina y la fuente del dato previo):

$$V_o(s) = \frac{R}{R+Ls}.Li_0 = \frac{Ri_0}{s+\omega_1} \Rightarrow v_{o,datoprevio}(t) = Y(t).Ri_0.e^{-\omega_1 t}$$

Sumando los efectos y reagrupando, obtenemos que en el intervalo $[0, T/2]$, la siguiente función representa la tensión de salida

$$v_o(t) = \left[\frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2} + Ri_0\right].e^{-\omega_1 t} - \frac{E\omega_1\omega_0}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\cos(\omega_0 t) + \frac{E\omega_1^2}{\omega_1^2+\omega_0^2}.\sin(\omega_0 t)$$

ii) Hallar la expresión de la salida $v_o(t)$ para el tramo $t \geq T/2$.

Para este segundo tramo, la entrada es nula, y solo vamos a tener el aporte del nuevo dato previo, correspondiete a i_0', el valor de la corriente por la inductancia al final del tramo anterior:

$$i_0' = i(T/2) = \frac{v_o(T/2)}{R}$$

Notemos que $\omega_0.T/2 = \pi$, dado que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Entonces,

$$\cos(\omega_0 T/2) = -1 \quad , \quad \sin(\omega_0 T/2) = 0$$

Por lo tanto,

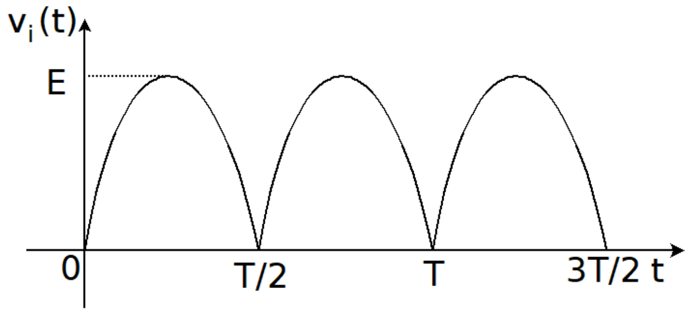
$$i_0' = \left[\frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)} + i_0\right].e^{-(\omega_1 T/2)} + \frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)}$$

Habiendo hallado el nuevo dato previo, la respuesta del circuito es igual a lo que ya hallamos antes:

$$v_o(t') = Y(t').Ri_0'.e^{-\omega_1 t'}$$

donde hemos introducido el tiempo auxiliar $t' = t - T/2$, para indicar que esta expresión describe la salida para el segundo tramo.

iii) Hallar el valor que debería tener i_0 para que el circuito arranque en régimen,si se aplica la entrada periódica de periodo $T/2$ de la figura de abajo.



Observemos en primer lugar que la nueva señal de entrada coincide con la anterior en el tramo inicial. Al ser periódica, para que el circuito ya esté en régimen desde el arranque se debe cumplir que la condición inicial de la inductancia sea la misma al comienzo de cada periodo. De acuerdo a lo hallado antes, esto se reduce a

$$i_0' = i_0 \Rightarrow \left[\frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)} + i_0\right].e^{-(\omega_1 T/2)} + \frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)} = i_0$$

Operamos:

$$\left[1 - e^{-(\omega_1 T/2)}\right].i_0 = \frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)}.\left[1 + e^{-(\omega_1 T/2)}\right] \Rightarrow i_0 = \frac{E\omega_1\omega_0}{R.(\omega_1^2+\omega_0^2)}.\frac{1+e^{-(\omega_1 T/2)}}{1-e^{-(\omega_1 T/2)}}$$

que tiene sentido solo si no se anula el denominador.