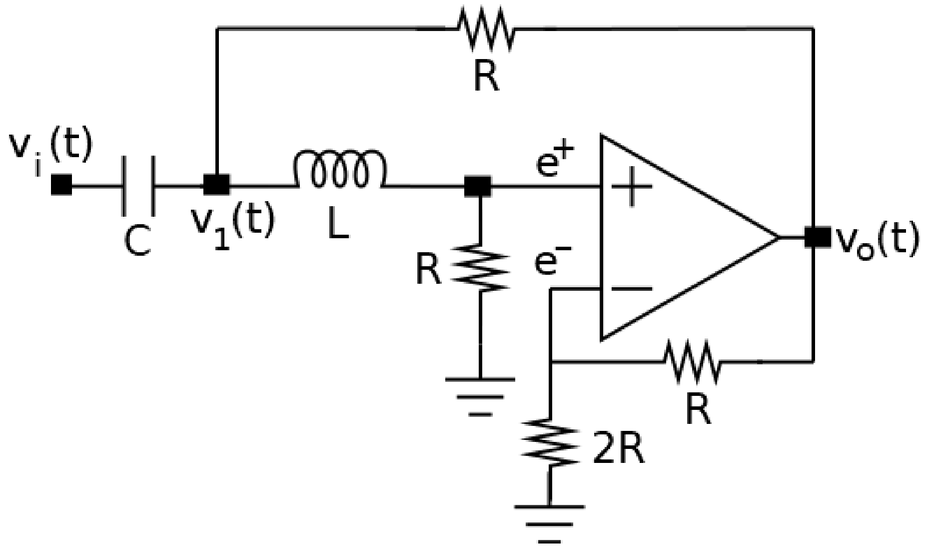
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2021

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Considere el circuito mostrado en la figura, con datos previos nulos y el operacional funcionando en zona lineal. Se define la pulsación $\frac{R}{L} = \omega_0 > 0$. Se sabe que $\frac{1}{RC} = \alpha.\omega_0 > 0$, con α que se introducirá luego.



(a) Dibujar el circuito equivalente en Laplace.

(b) Hallar la función de transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$

(c) Demostrar que $H(s)$ se puede escribir como

$$H(s) = K.\frac{\omega_0 s}{s^2 + (1+\alpha)\omega_0 s + \frac{\alpha}{2}.\omega_0^2}$$

y calcular K.

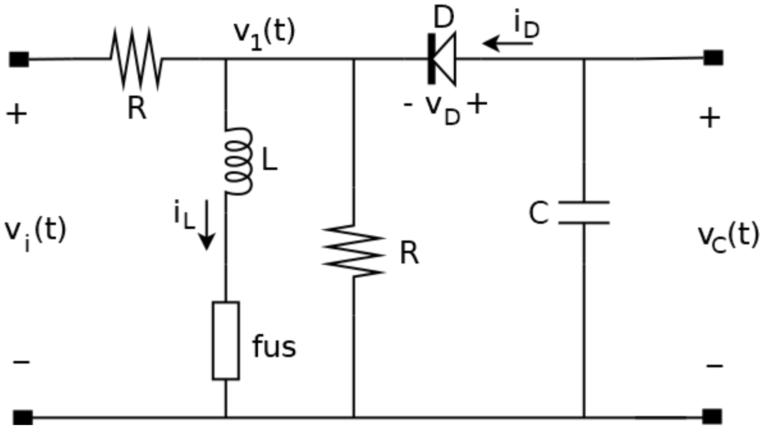
(d) Para $\alpha = 97$, realizar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$ y bosquejar el Diagrama real de módulo.

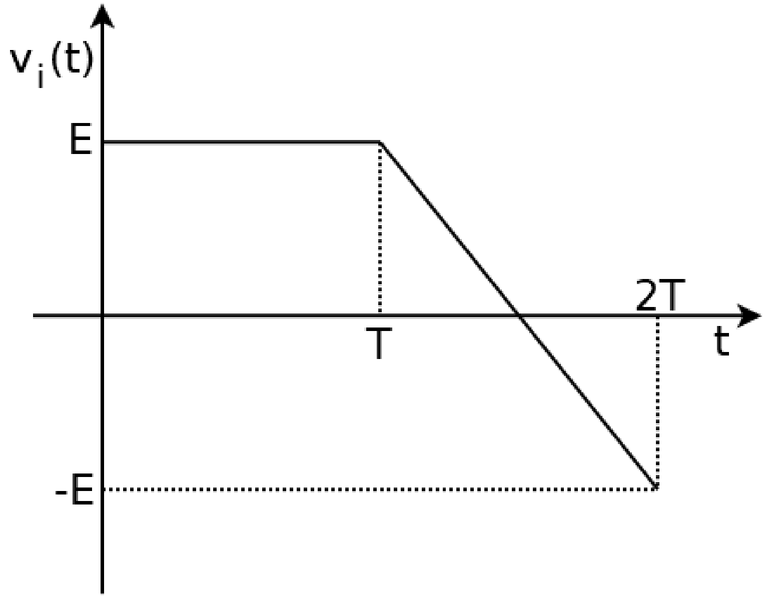
(e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema introduce una ganancia mayor que 1? JUSTIFICAR!!!

Problema 2

Se considera el circuito de la figura. El condensador está inicialmente cargado a una tensión $v_{C0} = E/4$. La inductancia está inicialmente descargada. El fusible tiene una corriente de apertura de valor I_{corte}.

La tensión de entrada $v_i(t)$ se muestra a continuación. Se sabe que $T = \frac{L}{R} = RC$ y se asume que, inicialmente, el diodo está OFF.





(a) Hallar el valor que debe tener la corriente de apertura del fusible, I_{corte}, para que el fusible abra en el instante $t = T$.

(b) Verificar que en el tramo $[0, T)$, el diodo no cambia de estado.

A partir de ahora comienza un nuevo tramo, que analizaremos definiendo un tiempo $t' = t - T$.

(c) Mostrar que la expresión en Laplace de la entrada a considerar en el nuevo tramo es

$$V_i(s) = \frac{E}{s} - \frac{2E}{Ts^2}$$

(d) Hallar el instante $t' = t_1 > 0$ en el que el diodo conmuta su estado.

Nota: explicar claramente cómo maneja los elementos no lineales, diodo y fusible, en cuanto a hipótesis, verificación, etc..

Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2021

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Enunciar y demostrar el Teorema de Miller, explicitando claramente las hipótesis y dónde se usan en la prueba.

Pregunta 2

(a) Se tiene una fuente real de tensión, funcionando en régimen sinusoidal y representada por un equivalente de Thévenin con tensión V_{Th} e impedancia de salida $Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$. Se carga la fuente con una impedancia $Z_L = R_L + jX_L$. Hallar el valor que debe tener Z_L para maximizar la potencia activa consumida por dicha impedancia (desarrollar todo el proceso).

(b) ¿Qué cambia en lo que hizo en la parte a) si se agrega la restricción de que $R_L = R_0$, constante y conocida.

Pregunta 3

(a) Definir la transformada de Laplace de una función $f(t)$: $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$.

(b) Probar las siguiente propiedades:

i) $\mathcal{L}\left[e^{-at}.f(t)\right](s)) = F(s+a)$

ii) $\mathcal{L}\left[Y(t-a).f(t-a)\right](s) = e^{-as}.F(s)$

Pregunta 4

Se considera un cuadripolo formado por un transformador simple, con inductancia de primario L_1, inductancia de secundario L_2 y mutua M.

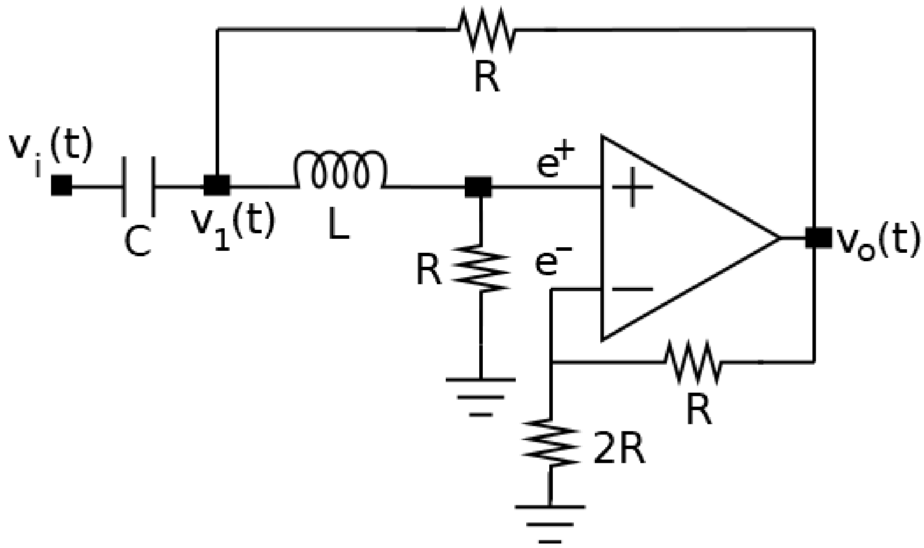
(a) Hallar las impedancias de vacío.

(b) Indicar, justificando, si es o no recíproco y hallar el equivalente T.

Solución

Problema 1

Considere el circuito mostrado en la figura, con datos previos nulos y el operacional funcionando en zona lineal. Se define la pulsación $\frac{R}{L} = \omega_0 > 0$. Se sabe que $\frac{1}{RC} = \alpha.\omega_0 > 0$, con α que se introducirá luego.



(a) Dibujar el circuito equivalente en Laplace.

Al haber datos previos nulos, el circuito equivalente en Laplace es idéntico al original, solo que las tensiones y corrientes refieren a las transformadas y aparecen las impedancias asociadas al condensador y la inductancia.

(b) Hallar la función de transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$

Al ser el operacional ideal, funcionando en zona lineal, no entra corriente por sus patas + y - (por la impedancia de entrada infinita) y tenemos el cortocircuito virtual entre dichas patas (por la ganancia infinita).

Plantamos el nudo en $V_1(s)$:

$$[(V_i(s) - V_1(s)].Cs = \frac{V_1(s) - V_o(s)}{R} + \frac{e^+(s)}{R}$$

Como el operacional está en una configuración no inversora, sabemos que

$$e^+(s) = e^-(s) = \frac{2}{3}.V_o(s)$$

Entonces

$$V_i(s).Cs = V_1(s).\left[Cs + \frac{1}{R}\right] - \frac{V_o(s)}{R} + \frac{2V_o(s)}{3R} = V_1(s).\left[\frac{1 + RCs}{R}\right] - \frac{1}{3}.\frac{V_o(s)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad 3RCs.V_i(s) = 3.V_1(s).[1 + RCs] - V_o(s)$$

Por otro lado, podemos relacionar $V_1(s)$ con $e^+(s)$ a través de un divisor de tensión.

$$e^+(s) = V_1(s).\frac{R}{R + Ls} = \frac{2}{3}.V_o(s) \Rightarrow V_1(s) = V_o(s).\frac{2(R + Ls)}{3R}$$

Combinando las expresiones obtenidas, llegamos a

$$3RCs.V_i(s) = 3.V_o(s).\frac{2(R + Ls)}{3R}.(1 + RCs) - V_o(s)$$

$$\Rightarrow 3R^2Cs.V_i(s) = 2.(R+Ls).(1+RCs).V_o(s) - R.V_o(s) = V_o(s).[2.(R+Ls).(1+RCs) - R]$$
$$\Rightarrow 3R^2Cs.V_i(s) = V_o(s).\left[2RLCs^2 + 2.\left(L+R^2C\right)s + R\right]$$

De donde

$$H(s) = \frac{3R^2Cs}{2RLCs^2 + 2.(L+R^2C)s + R} = \frac{3R^2Cs}{2RLC\left[s^2 + 2.\frac{L+R^2C}{2RLC}.s + \frac{1}{2LC}\right]}$$

$$H(s) = \frac{3}{2}.\frac{\frac{R}{L}.s}{s^2 + \left[\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right].s + \frac{1}{2LC}}$$

(c) Demostrar que $H(s)$ se puede escribir como

$$H(s) = K.\frac{\omega_0 s}{s^2 + (1+\alpha)\omega_0 s + \frac{\alpha}{2}.\omega_0^2}$$

y calcular K.

Sabemos que $\omega_0 = \frac{R}{L}$. Entonces

$$H(s) = \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.s}{s^2 + [\alpha.\omega_0 + \omega_0].s + \frac{1}{2LC}}$$

Como $\frac{R}{L} = \omega_0$ y $\frac{1}{RC} = \alpha.\omega_0$, entonces

$$\frac{R}{L}.\frac{1}{RC} = \frac{1}{LC} = \alpha.\omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2LC} = \frac{\alpha}{2}.\omega_0^2$$

De donde

$$H(s) = \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.s}{s^2 + [1+\alpha].\omega_0.s + \frac{\alpha}{2}.\omega_0^2}$$

y llegamos a lo pedido, con $K = \frac{3}{2}$.

(d) Para $\alpha = 97$, realizar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$ y bosquejar el Diagrama real de módulo.

En primer término tenemos que hallar las dos raíces del denominador, discutiendo según sean reales o compljeas conjugadas. Definamos $x = \frac{s}{\omega_0}$. El denominador queda así:

$$x^2 + 98x + \frac{97}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 & \approx & -0,5 \Rightarrow -\omega_1 = -0,5.\omega_0 \\ p_2 & \approx & -97,5 \Rightarrow -\omega_2 = -97,5.\omega_0 \end{cases}$$

Tenemos entonces dos raíce distintas, separadas más de dos décadas.

$$H(j\omega) = \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.(j\omega)}{(j\omega+\omega_1).(j\omega+\omega_2)}$$

Hacemos un análisis por bandas (tenemos tres bandas). Comenzamos por la banda de baja frecuencia.

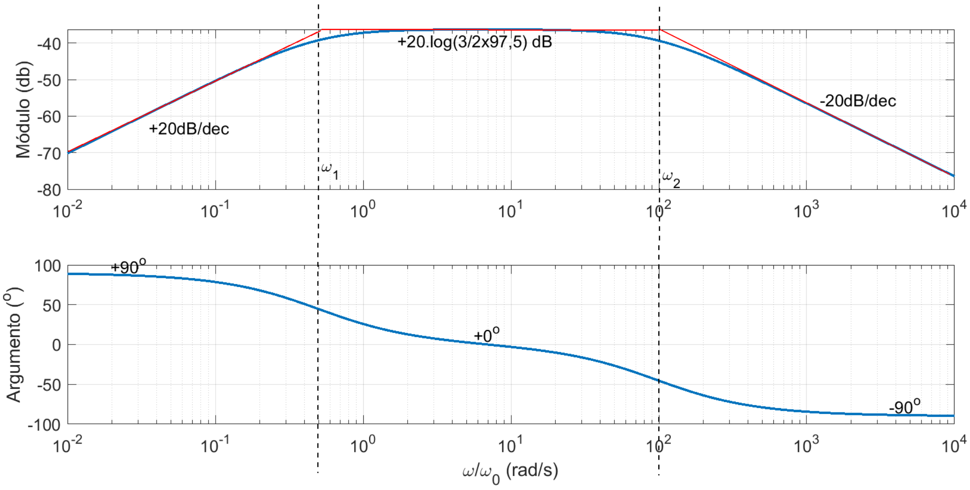
$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.(j\omega)}{(\omega_1).(\omega_2)} = \frac{3}{2}\frac{\omega_0.j\omega}{\frac{\alpha}{2}.\omega_0^2} = \frac{3}{\alpha}.\frac{j\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{3}{\alpha}\frac{\omega}{\omega_0} \\ arg(H) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.(j\omega)}{(j\omega).(\omega_2)} \approx \frac{3}{2}.\frac{\omega_0}{97{,}5\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{3}{2\times 97{,}5} \\ arg(H) \approx 0\ (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Al ser raíces simples, las variaciones de fase no pueden superar los $\pi/2$ radianes, por lo que en esta banda el $arg(H)$ se aproxima a 0 radianes.

$$\omega_2 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{3}{2}.\frac{\omega_0.(j\omega)}{(j\omega).(j\omega)} = \frac{3}{2}.\frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{3\omega_0}{2\omega} \\ arg(H) \approx -\frac{\pi}{2}\ (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Con un argumento similar a lo expresado antes, conluimos que la fase disminuye hacia $-\frac{\pi}{2}$.

La siguiente figura muestra los diagramas reales y asintóticos.



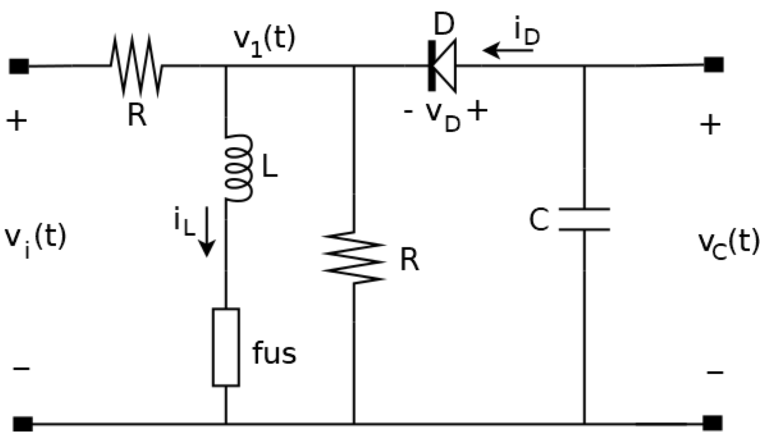
(e) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo a la cual la amplitud de la salida sea mayor que la amplitud de la entrada?

De los diagramas de Bode se desprende directamente que las ganancias son siempre negativas en decibeles. Tener presente que al estar las raíces muy separadas entre sí, los diagramas asintóticos son una buena aproximación. Por lo tanto, no hay una frecuencia de trabajo a la cual la amplitud de la salida supere a la de la entrada.

Problema 2

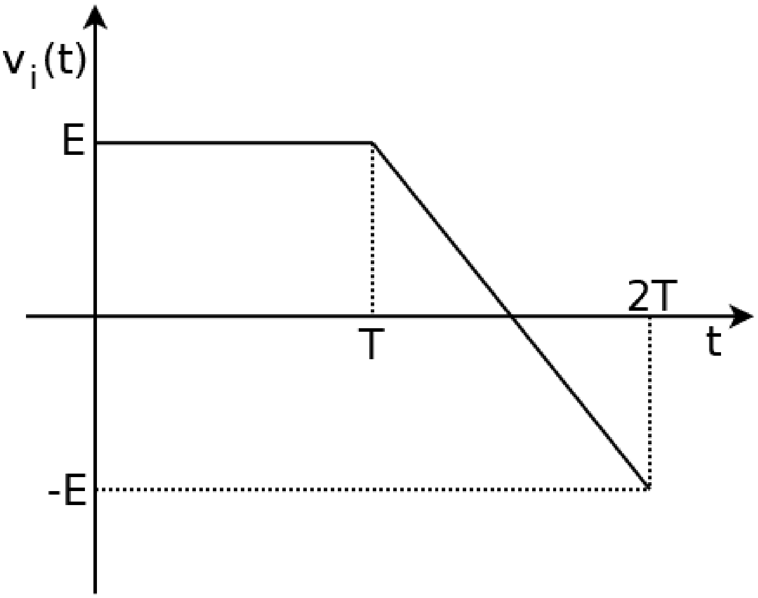
Se considera el circuito de la figura. El condensador está inicialmente cargado a una tensión $v_{C0} = E/4$. La inductancia está inicialmente descargada. El fusible tiene una corriente de apertura de valor I_{corte}.

La tensión de entrada $v_i(t)$ se muestra a continuación. Se sabe que $T = \frac{L}{R} = RC$ y se asume que, inicialmente, el diodo está OFF.

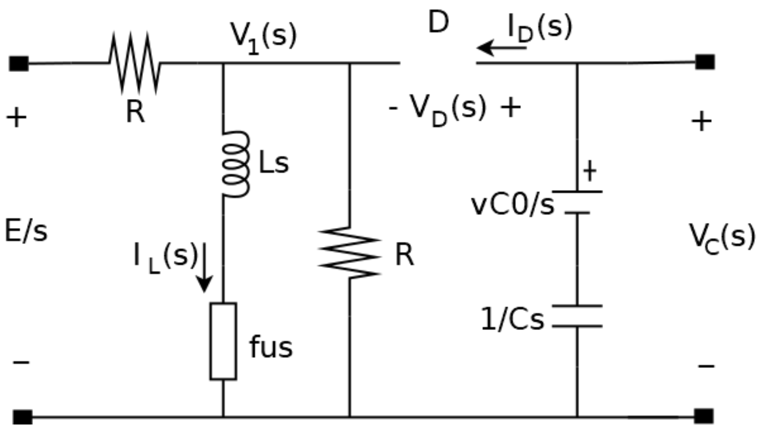


(a) Hallar el valor que debe tener la corriente de apertura del fusible, I_{corte}, para que el fusible abra en el instante $t = T$.

Dado que la entrada es continua a tramos y hay elementos no lineales, analizamos por tramos. Consideremos un primer tramo tentativo, hasta $t = T$, en el que la entrada es una constante. Supongamos el fusible conduciendo (ON) y el diodo cortado (OFF). Dibujemos el circuito equivalente en Laplace. Dejamos presente dónde están el diodo y el fusible, ya que tenemos que monitorearlos. La verificación del estado del diodo la hacemos en la parte b). Como la bobina está inicialmente desacrgada, en el circuito equivalente en Laplace no aparece una fuente asociada a dicho dato previo nulo. Para resolver el circuito, esencialmente tenemos que hallar la tensión $V_1(s)$. Antes de



plantear cualquier ecuación, veamos qué sabemos. Tenemos dos circuitos. El de la derecha, el del condensador *no hace nada*.



En el circuito de la izquierda, tenemos una circuito $R-L$ excitado por una fuente de continua. Sabemos que, en el inicio, la corriente por la inductancia es nula y por lo tanto, $v_1(0) = E/2$. Además, al infinito, la bobina se comportará como un cortocircuito, por lo que

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} i_L(t) = \frac{E}{R}$$

Planteamos el nudo para hallar $V_1(s)$:

$$\frac{\frac{E}{s} - V_1(s)}{R} = \frac{V_1(s)}{Ls} + \frac{V_1(s)}{R} = V_1(s).\left[\frac{R+Ls}{RLs}\right] \Rightarrow \frac{E}{s} = V_1(s).\left[1 + \frac{R+Ls}{Ls}\right] = V_1(s).\left[\frac{R+2Ls}{Ls}\right]$$

De donde

$$V_1(s) = \frac{LE}{R+2Ls} = \frac{1}{s+\frac{R}{2L}}.E = \frac{1}{s+\frac{1}{2T}}.\frac{E}{2} \Rightarrow v_1(t) = Y(t).\frac{E}{2}.e^{-t/2T}$$

Notar que se cumplen los extremos que habíamos anticipado. Para calcular la corriente por el fusible, podemos ir por Laplace:

$$I_L(s) = \frac{V_1(s)}{Ls} = \frac{E}{2}.\left[\frac{1}{s+\frac{1}{2T}}\right].\frac{1}{Ls}$$

(al no haber dato previo no nulo en la inductancia, la tensión en Laplace se da toda en la impedancia Ls). También podemos trabajar directamente en el tiempo, observando que, para tiempos positivos:

$$i_L(t) = \frac{E - v_1(t)}{R} - \frac{v_1(t)}{R} = \frac{E - 2v_1(t)}{R} = \frac{E - 2.\frac{E}{2}.e^{-t/2T}}{R} = \frac{E}{R}.\left(1 - e^{-t/2T}\right)$$

Para lograr con lo pedido, se debe cumplir

$$I_{corte} = i_L(T) = \frac{E}{R}.\left(1 - e^{-T/2T}\right) \Rightarrow \boxed{I_{corte} = \frac{E}{R}.\left(1 - e^{-1/2}\right)}$$

(b) Verificar que en el tramo $[0, T)$, el diodo no cambia de estado.

Para verificar el estado del diodo, al haberlo supuesto OFF, debemos ver el signo de la tensión en bornes, medida con la polaridad de la figura. Tenemos que

$$v_D(t) = v_C(t) - v_1(t) = Y(t).\left[\frac{E}{4} - \frac{E}{2}.e^{-t/2T}\right] = Y(t).\frac{E}{2}.\left[\frac{1}{2} - e^{-t/2T}\right]$$

Observemos que inicialmente es negativo (igual a $-E/4$) y que al inifinito (si el tramo se mantuviera por siempre) va hacia $+E/4$. Así que efectivamente el diodo arranca OFF. ¿Hasta cuándo? Si siguiera el tramo, sería hasta el instante t^* en que se anula el v_D:

$$0 = v_D(t^*) = \frac{E}{2}.\left[\frac{1}{2} - e^{-t^*/2T}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-t^*/2T} \Rightarrow -\ln(2) = -\frac{t^*}{2T} \Rightarrow t^* = 2T\ln(2) \approx 1{,}38T > T$$

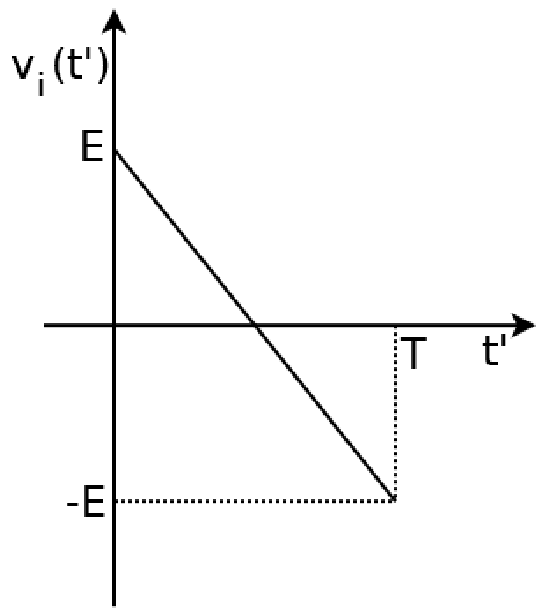
Por lo que diodo se mantiene OFF a lo largo del primer tramo.

A partir de ahora comienza un nuevo tramo, que analizaremos definiendo un tiempo $t' = t - T$.

(c) Mostrar que la expresión en Laplace de la entrada a considerar en el nuevo tramo es

$$V_i(s) = \frac{E}{s} - \frac{2E}{Ts^2}$$

En términos de t', la gráfica de la entrada es la siguiente:



Podemos escribirla así

$$v_i(t') = Y(t').E - Y(t').\frac{2E}{T}t' \Rightarrow V_i(s) = \frac{E}{s} - \frac{2E}{Ts^2}$$

(d) Hallar el instante $t' = t_1 > 0$ en el que el diodo conmuta su estado.

Consideramos ahora un nuevo tramo $t \in (T, T + t_1)$, ($t' \in (0, t_1)$), en el que el diodo está OFF y la entrada es la analizada en la parte b). Considerando nuevamente el circuito equivalente en Laplace, vemos que la tensión v_1 ahora es simplemente un divisor de tensión entre dos resistencias iguales, por lo que $v_1(t) = \frac{v_i(t)}{2}$. La tensión en bornes del diodo vale

$$v_D(t') = v_C(t') - v_1(t') = Y(t').\frac{E}{4} - \left[Y(t').\frac{E}{2} - Y(t').\frac{E}{T}t'\right] = Y(t').E.\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{t'}{T}\right]$$

$$\Rightarrow v_D(t') = Y(t').E.\left[-\frac{1}{4}+\frac{t'}{T}\right]$$

Inicialmente es negativo, y el diodo se mantendrá OFF hasta el instante $t' = t_1$ en el que

$$\frac{1}{4} = \frac{t_1}{T} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{4}$$