

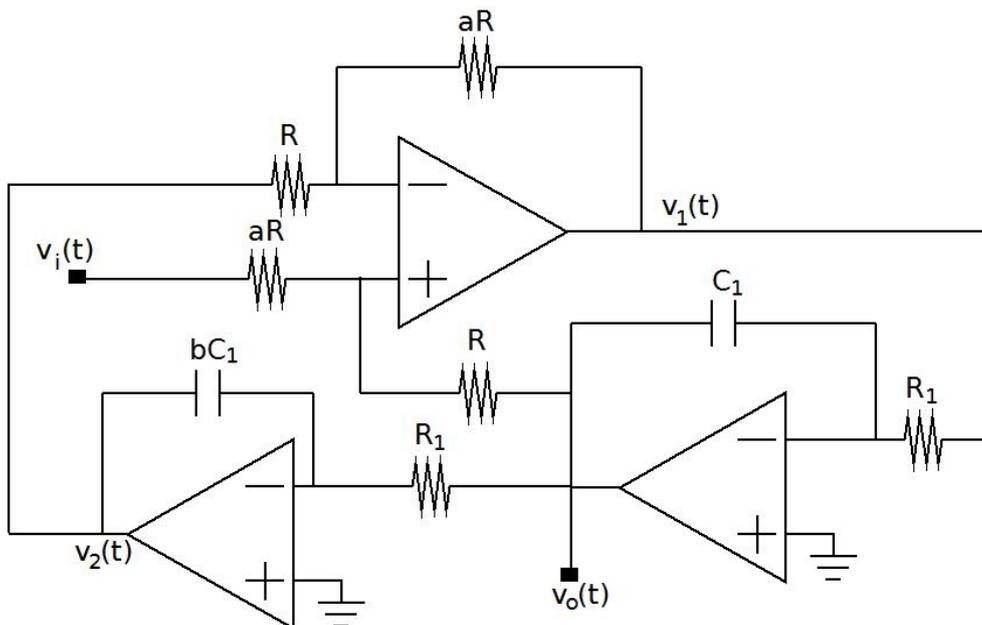
# Teoría de Circuitos

## Examen de diciembre de 2019

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

### Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.

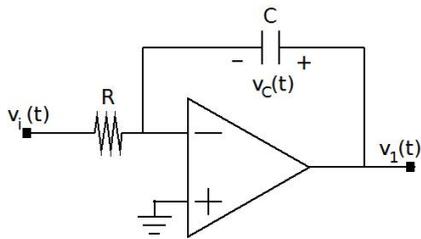


- (a) i) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ . (Se sugiere identificar bloques).  
 ii) Se sabe que  $b = \frac{2}{5}$ . Se define  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ . Mostrar que se  $H(s)$  se puede escribir así:

$$H(s) = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{5a}{2}\omega_1^2}$$

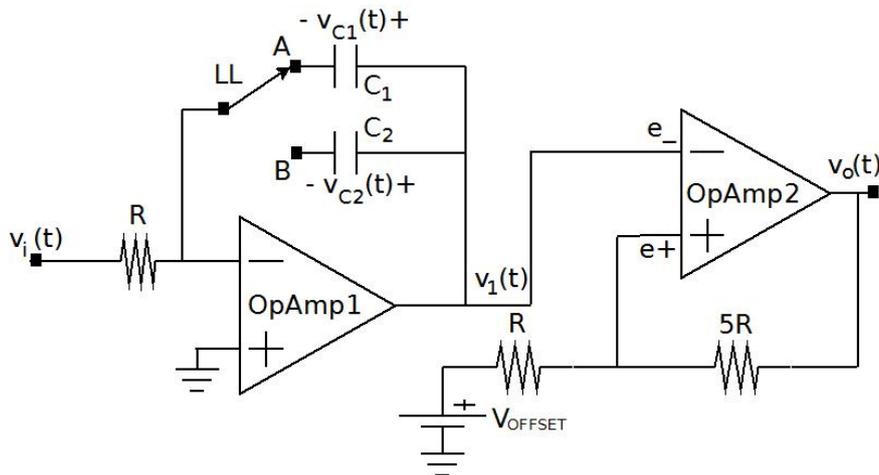
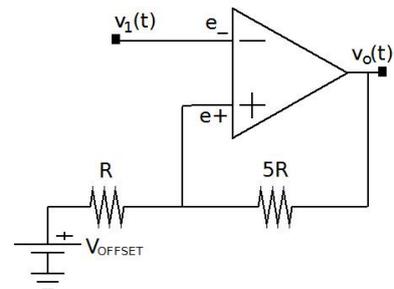
- iii) Hallar  $a$  tal que el sistema presente un factor de amortiguamiento  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Este valor se mantendrá hacia adelante.  
 (b) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$ , explicando claramente su deducción y construcción.  
 (c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo asintótico y el real a la frecuencia natural del sistema. Expresarla en decibelios.  
 (d) ¿Existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el faser de la salida sea paralelo al faser de entrada? **Justificar!!**

### Problema 2

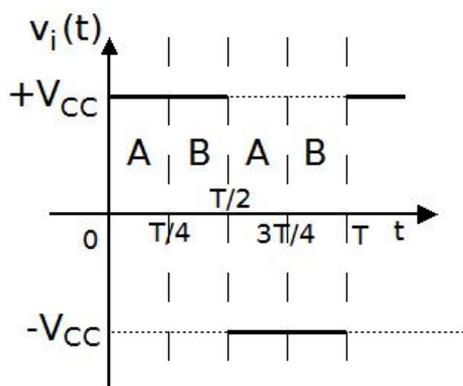


(a) En el circuito de la izquierda, el operacional es ideal y funciona en zona lineal. Sabiendo que  $v_i(t) = Y(t) \cdot E$  y que  $v_C(0^-) = v_{C0}$ , hallar  $v_1(t)$  para todo instante positivo.

(b) En el circuito de la derecha, el comparador está alimentado a  $\pm V_{CC}$ . Diseñar  $V_{OFFSET}$  para que la ventana de histéresis del Schmitt trigger esté entre  $-\frac{V_{CC}}{3}$  y  $-\frac{2V_{CC}}{3}$ .



(c) En el circuito de arriba, los operacionales son como los anteriores (OpAmp1 funciona en zona lineal, OpAmp2 es un comparador). Los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran **inicialmente descargados**. Se cumple que  $RC_1 = T$ ,  $C_2 = C_1/3$ . La tensión  $v_i(t)$  es una onda cuadrada simétrica de amplitud  $+V_{CC}$  y la llave LL opera conmutando entre los puntos A y B, como muestra la gráfica. La conmutación de la llave implica la discontinuidad de la tensión  $v_1(t)$ .



- i) Hallar y bosquejar las tensiones  $v_{C1}(t)$ ,  $v_{C2}(t)$  y  $v_1(t)$  para  $t \in [0, T]$ , observando que en  $t = T$  los condensadores vuelven a estar descargados.
- ii) Usando la parte b), hallar la tensión  $v_o(t)$  para  $t \in [0, T]$ , notando que el sistema resulta estar en régimen periódico.

# Teoría de Circuitos

## Examen de diciembre de 2019

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

### Pregunta 1

Se tiene un sistema trifásico de fuentes de  $400V$  de tensión compuesta. Se tiene un motor trifásico que puede conectarse en estrella o en triángulo, según se prefiera. Los tres bobinados del motor se modelan como tres impedancias inductivas idénticas de valor  $Z$ .

¿Cómo conectaría el motor a la fuente, si se quiere minimizar la corriente que circula por los bobinados? JUSTIFICAR!!

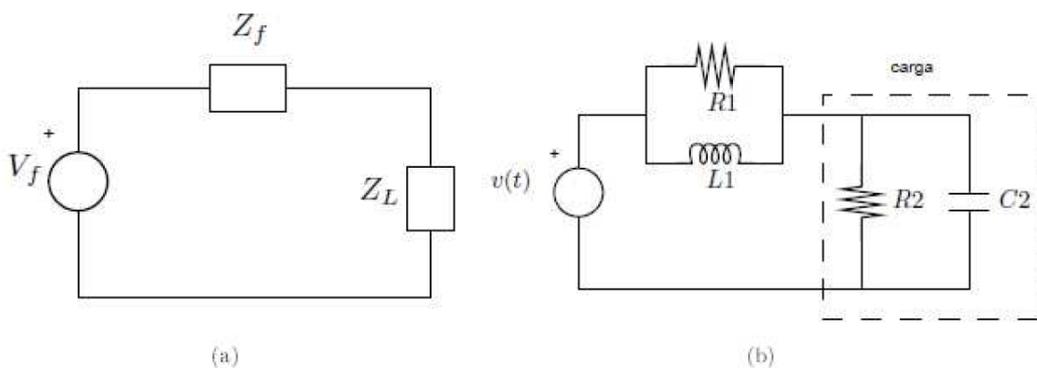
### Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal  $H(j\omega) = K \cdot \frac{(10\omega_0 - j\omega)}{(j\omega + \omega_0)}$ , siendo  $K$  y  $\omega_0$  estrictamente positivos.

- Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, **explicando claramente su obtención.**
- Considerando régimen sinusoidal, determinar  $K$  para que exista alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema responde con una señal con la misma amplitud que la entrada.

### Pregunta 3

- El circuito de izquierda de la figura está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir una relación entre  $Z_f$  y  $Z_L$  que asegure que se disipa la máxima potencia activa posible en  $Z_L$ .
- Para el circuito de la derecha de la figura, con excitación  $v_i(t) = A \cos(\omega_0 t)$  y  $R_1 = R_2$ , hallar el valor del condensador  $C_2$ , en función de los demás parámetros del circuito, que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la impedancia de carga.



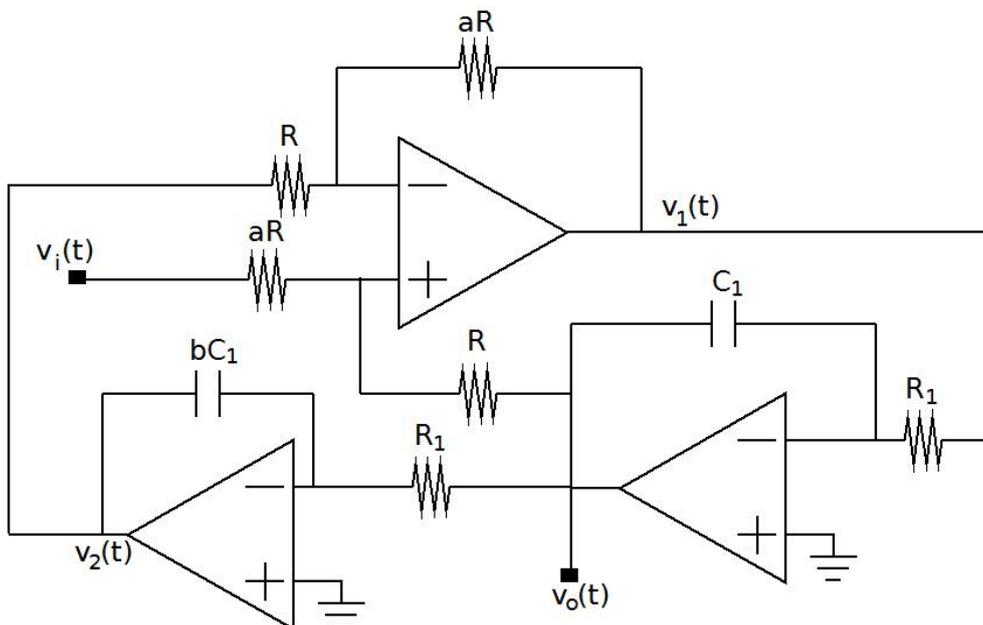
### Pregunta 4

- Definir la transformada de Laplace de una función.
- Enunciar tres propiedades de la transformada de Laplace y probar al menos una.

## Solución

### Problema 1

Se considera el circuito de la figura, con los operacionales ideales y las tensiones medidas respecto de tierra.



- (a) i) Hallar la transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ .

Para hallar la transferencia, pasamos al circuito equivalente en Laplace, con datos previos nulos. Como los operacionales son ideales, no entra corriente por las patas + y - (por la impedancia de entrada infinita) y tenemos además el cortocircuito virtual de ambas patas (por la ganancia infinita). Observemos que los operacionales de abajo están en una configuración inversora que implementa un integrador. Tenemos que

$$\frac{V_o(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{R_1 C_1 s} \quad , \quad \frac{V_2(s)}{V_o(s)} = -\frac{1}{R_1 b C_1 s}$$

Obtenemos entonces que

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{b R_1^2 C_1^2 s^2}$$

En el operacional de arriba, sabemos que  $e^+ = e^-$ . Aplicamos superposición:

$$e^+(s) = \left( \frac{R}{(a+1)R} \right) V_i(s) + \left( \frac{aR}{(a+1)R} \right) V_o(s) = \frac{V_i(s)}{a+1} + \frac{aV_o(s)}{a+1}$$

$$e^-(s) = \left( \frac{aR}{(a+1)R} \right) V_2(s) + \left( \frac{R}{(a+1)R} \right) V_1(s) = \frac{aV_2(s)}{a+1} + \frac{V_1(s)}{a+1}$$

Igualando, obtenemos

$$\frac{V_i(s)}{a+1} + \frac{aV_o(s)}{a+1} = \frac{aV_2(s)}{a+1} + \frac{V_1(s)}{a+1} \Rightarrow V_i(s) + aV_o(s) = aV_2(s) + V_1(s)$$

Eliminando  $V_1$  y  $V_2$ , resulta

$$V_i(s) + aV_o(s) = -\frac{aV_o(s)}{bR_1 C_1 s} - R_1 C_1 s V_o(s) \Rightarrow V_i(s) = - \left[ a + \frac{a}{bR_1 C_1 s} + R_1 C_1 s \right] V_o(s)$$

Entonces

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{bR_1 C_1 s}{a + abR_1 C_1 s + bR_1^2 C_1^2 s^2}$$

ii) Se sabe que  $b = \frac{2}{5}$ . Se define  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ . Mostrar que se  $H(s)$  se puede escribir así:

$$H(s) = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{5a}{2}\omega_1^2}$$

Observemos que podemos escribir  $H(s)$  así:

$$\begin{aligned} H(s) &= -\frac{bR_1 C_1 s}{a + abR_1 C_1 s + bR_1^2 C_1^2 s^2} = -\frac{bR_1 C_1 s}{bR_1^2 C_1^2 \left( \frac{a}{bR_1^2 C_1^2} + \frac{abR_1 C_1}{bR_1^2 C_1^2} s + s^2 \right)} \\ &= -\frac{\frac{1}{R_1 C_1} s}{s^2 + \frac{a}{R_1 C_1} s + \frac{a}{bR_1^2 C_1^2}} = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{a}{b}\omega_1^2} = -\frac{\omega_1 s}{s^2 + a\omega_1 s + \frac{5a}{2}\omega_1^2} \end{aligned}$$

iii) Hallar  $a$  tal que el sistema presente un factor de amortiguamiento  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Este valor se mantendrá hacia adelante.

Queremos que el denominador de  $H(s)$  sea de la forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Rightarrow \begin{cases} a\omega_1 &= 2\zeta\omega_n \\ \frac{5a}{2}\omega_1^2 &= \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\omega_1 &= 2\zeta \left( \sqrt{\frac{5a}{2}} \right) \omega_1 \\ \Rightarrow &a = 2\zeta \left( \sqrt{\frac{5a}{2}} \right) = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left( \sqrt{\frac{5a}{2}} \right) = \sqrt{2a} \end{cases}$$

De la identidad  $a^2 = 2a$  obtenemos  $a = 0$  (lo descartamos) y  $a = 2$  y  $\omega_n = \sqrt{5}\omega_1$ . Por lo tanto,

$$H(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\omega_n s}{s^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n s + \omega_n^2}$$

(b) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de  $H(j\omega)$ , explicando claramente su deducción y construcción.

$$H(j\omega) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Hacemos un análisis por bandas. La única frecuencia crítica es  $\omega_n$ .

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\omega_n(j\omega)}{\omega_n^2} = -\frac{j\omega}{\sqrt{5}\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H| &\approx 20 \log(\omega) - 20 \log(\sqrt{5}\omega_n) \text{ dB} \\ \arg(H) &\approx -90^\circ \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{5}(j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |H| &\approx 20 \log(\omega_n) - 20 \log(\sqrt{5}\omega) \text{ dB} \\ \arg(H) &\approx +90^\circ (-270^\circ) \end{cases}$$

El denominador aporta  $\pm 180^\circ$ . Para resolver si sube o baja, evaluamos en la frecuencia natural:

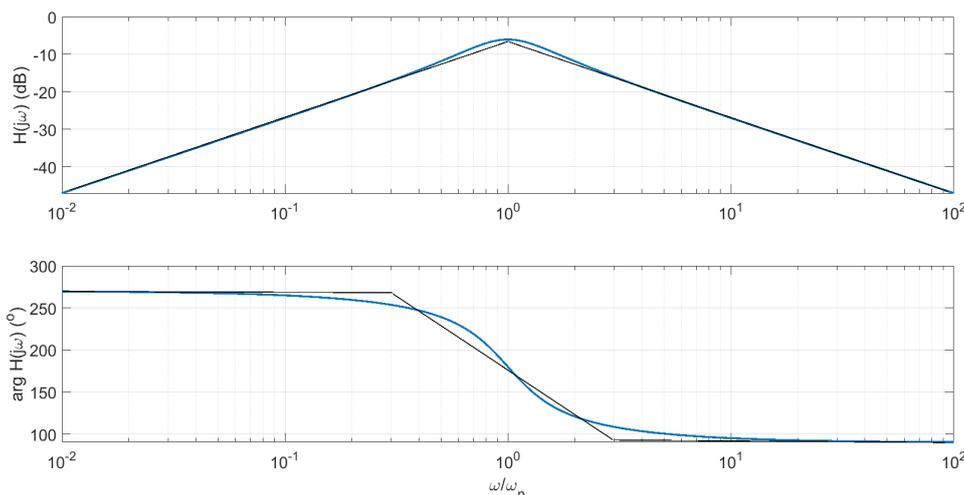
$$H(j\omega_n) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\omega_n(j\omega_n)}{(j\omega_n)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{j}{\frac{2j}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}$$

por lo que fase decrece desde  $-90^\circ$  hacia  $-270^\circ$ . La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos y reales.

(c) Hallar la distancia entre el diagrama de Bode de módulo asintótico y el real a la frecuencia natural del sistema. Expresarla en decibelios.

Sabemos que  $|H_{real}(j\omega_n)| = \frac{1}{2}$ , en tanto  $|H_{as}(j\omega_n)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Entonces

$$|H_{real}(j\omega_n)|_{dB} - |H_{as}(j\omega_n)|_{dB} = 20 \log \left( \frac{|H_{real}(j\omega_n)|}{|H_{as}(j\omega_n)|} \right) = 20 \log \left( \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \right) \approx 1 \text{ dB}$$



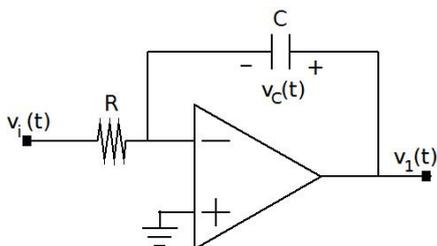
- (d) ¿Existe una frecuencia de la trabajo a la cual en régimen el faser de de la salida sea paralelo al faser de entrada? **Justificar!!**

Sabemos que en régimen sinusoidal, ante una entrada de la forma  $v_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , el sistema responde con  $v_{o.reg}(t) = A|A(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi + \arg(H(j\omega_0)))$ . Como queremos que los respectivos fasores sean paralelos, se debe cumplir que

$$\arg [H(j\omega_0)] = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observando el diagrama de fase, vemos que la fase varía continuamente e decreciendo desde  $270^\circ$  hacia  $90^\circ$ , por lo que pasará por  $180^\circ$ . Además, por haber evaluado en  $\omega_n$ , sabemos que es a condición se cumple para  $\omega_0 = \omega_n$ .

### Problema 2



- (a) En el circuito de la arriba, el operacional es ideal y funciona en zona lineal. Sabiendo que  $v_i(t) = Y(t) \cdot E$  y que  $v_C(0^-) = v_{C0}$ , hallar  $v_1(t)$  para todo instante positivo.

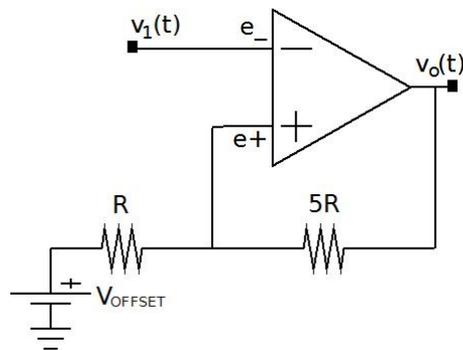
Pasamos al circuito equivalente en Laplace, en el que tenemos dos fuentes independientes: una correspondiente a la entrada,  $V_i(s) = \frac{E}{s}$ , y otra correspondiente al dato previo,  $\frac{v_{C0}}{s}$ . Al estar el operacional en zona lineal, tenemos que no entra corriente por las patas + y - (por la resistencia de entrada infinita) y hay cortocircuito virtual entre las patas + y - (por la ganancia infinita). Esto implica, entre otras cosas, que la corriente por  $R$  es igual a la corriente por  $C$ . Para hallar la respuesta, aplicamos superposición. Cuando anulamos el dato previo, tenemos una configuración inversora estándar, que esencialmente es un circuito integrador:

$$V_1(s) = -\frac{1}{RCs} V_i(s) = -\frac{E}{RCs^2}$$

Cuando anulamos la entrada y consideramos sólo el dato previo, observamos que por la resistencia  $R$  no puede circular corriente, ya que ambos extremos de  $R$  están a tierra. Entonces, la tensión del condensador, que coincide con la tensión de salida del operacional, se mantiene constante. Sumando los efectos de ambas entradas, obtenemos que

$$V_1(s) = -\frac{E}{RCs^2} + \frac{v_{C0}}{s} \rightarrow v_1(t) = Y(t) \left[ v_{C0} - \frac{E}{RC} t \right]$$

- (b) En el circuito de la figura, el comparador está alimentado a  $\pm V_{CC}$ . Diseñar  $V_{OFFSET}$  para que la ventana de histéresis del Schmitt trigger esté entre  $-\frac{V_{CC}}{3}$  y  $-\frac{2V_{CC}}{3}$ .



Sabemos que la salida del comparador está saturada a  $+V_{CC}$  (si la pata + le gana a la pata -) o a  $-V_{CC}$  (si la pata - le gana a la pata +). La pata - la fija la entrada  $v_1(t)$ , en tanto la pata + vale

$$e^+(t) = \frac{v_o(t)}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6}$$

donde hemos aplicado superposición y divisor de tensión. Si suponemos el comparador saturado a  $+V_{CC}$ , entonces la tensión de umbral vale  $\frac{V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6}$  y es compatible con

$$v_1(t) < \frac{V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6}$$

en tanto si el comparador está saturado a  $-V_{CC}$ , la tensión de umbral vale  $\frac{-V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6}$  y es compatible con

$$v_1(t) > \frac{-V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6}$$

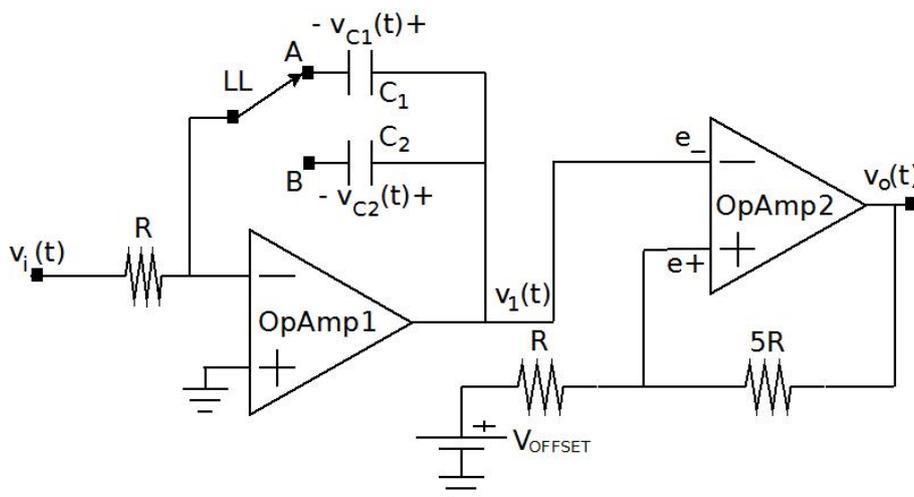
Podemos observar la histéresis del sistema, que surge de que los umbrales de conmutación dependen del estado de la salida del comparador. Queremos entonces que

$$\frac{V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6} = -\frac{V_{CC}}{3} = \frac{2V_{CC}}{6} \Rightarrow V_{OFFSET} = -\frac{3}{5}V_{CC}$$

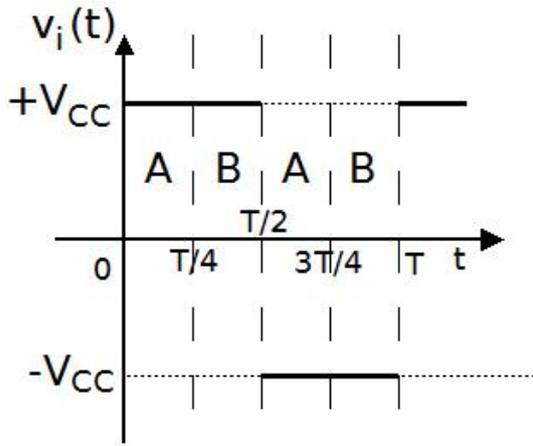
y que

$$-\frac{V_{CC}}{6} + \frac{5V_{OFFSET}}{6} = -\frac{2V_{CC}}{3} = \frac{4V_{CC}}{6} \Rightarrow V_{OFFSET} = -\frac{3}{5}V_{CC}$$

y encontramos la solución  $V_{OFFSET} = -\frac{3}{5}V_{CC}$ .



- (c) En el circuito de arriba, los operacionales son como los anteriores (OpAmp1 funciona en zona lineal, OpAmp2 es un comparador). Los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  se encuentran **inicialmente descargados**. Se cumple que  $RC_1 = T$ ,  $C_2 = C_1/3$ . La tensión  $v_i(t)$  es una onda cuadrada



- i) Hallar y bosquejar las tensiones  $v_{C1}(t)$ ,  $v_{C2}(t)$  y  $v_1(t)$  para  $t \in [0, T]$ , observando que en  $t = T$  los condensadores vuelven a estar descargados.
- ii) Usando la parte b), hallar la tensión  $v_o(t)$  para  $t \in [0, T]$ , notando que el sistema resulta estar en régimen periódico.

simétrica de amplitud  $+V_{CC}$  y la llave LL opera conmutando entre los puntos A y B, como muestra la gráfica. La conmutación de la llave implica la discontinuidad de la tensión  $v_1(t)$ .

Observemos que el circuito es lineal a tramos y que lo podemos analizar separándolo en dos partes, que se relacionan con las partes (a) y (b). La parte izquierda se relaciona con la parte (a) (integrador inversor), y la salida del OpAmp1 excita el Schmitt trigger de la parte (b), con los umbrales hallados antes.

La salida del integrador va a integrar la onda cuadrada, sumándole la carga inicial del condensador que esté activo, según el estado de la llave LL. Hagamos un análisis por tramos. Los tramos quedarán definidos por las entradas y la acción de la llave, que están predefinidas.

Miremos primero el tramo  $[0, T/4]$ , en el que la entrada vale  $+V_{CC}$  y la llave está en el punto A. Tenemos que considerar  $C_1$ , que está inicialmente descargado. Entonces

$$v_1(t) = -Y(t) \cdot \frac{V_{CC}}{RC_1} t$$

En  $t = T/4$  comienza el nuevo tramo  $[T/4, T/2]$ , en el que la entrada sigue valiendo  $+V_{CC}$  y la llave está en B. Consideramos ahora el condensador  $C_2$ , inicialmente descargado. Notemos que en este tramo, el condensador  $C_1$  queda desconectado, por lo que mantiene su carga, que vale

$$v_{C10} = -\frac{V_{CC} T}{RC_1 4} = -\frac{V_{CC}}{4}$$

Definamos un nuevo origen de tiempos  $t' = 0$ , correspondiente a  $t' = t - T/4$ . Entonces

$$v_1(t') = -Y(t') \frac{V_{CC}}{RC_2} t'$$

Al llegar a  $t' = T/4$  ( $t = T/2$ ), la entrada conmuta a  $-V_{CC}$  y la llave reconecta  $C_1$ , que tiene la carga que tenía al desconectarse. notemos que el condensador  $C_2$  mantiene su carga durante este tramo, que vale

$$v_{C20} = -\frac{V_{CC} T}{RC_2 4} = -\frac{3V_{CC}}{4}$$

Definamos un nuevo origen de tiempos  $t'' = 0$  ( $t'' = t - T/2$ ). En este nuevo tramo,

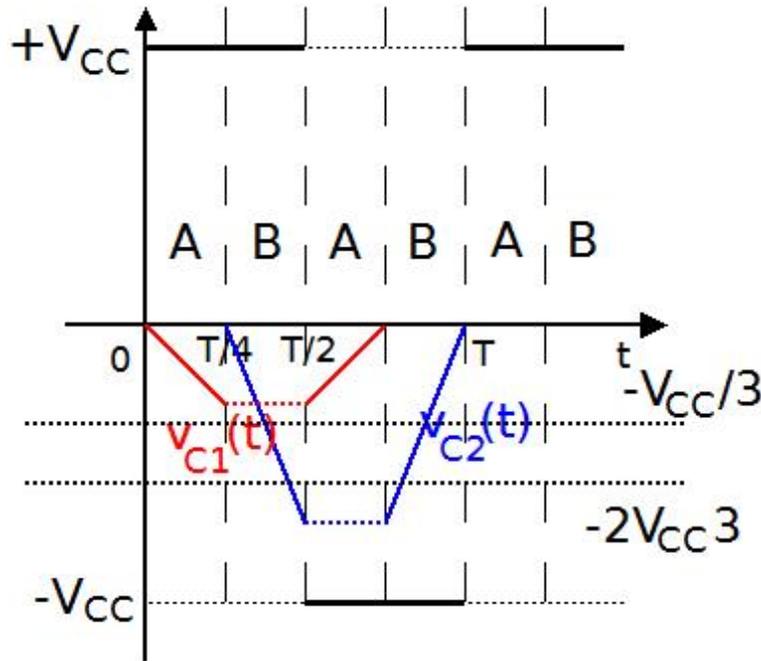
$$v_1(t'') = Y(t'') \left[ v_{C10} + \frac{V_{CC}}{RC_1} t'' \right]$$

Esto vale hasta  $t'' = T/4$  ( $t = 3T/4$ ). En ese instante

$$v_1(t'')|_{t''=T/4} = v_{C10} + \frac{V_{CC} T}{RC_1 4} = 0$$

Observemos que esto es coherente con que el condensador  $C_1$  se carga y descarga linealmente con la misma pendiente y durante el mismo tiempo.

Algo similar va a suceder con el condensador  $C_2$  en el tramo  $[3T/4, T]$ . Vemos entonces que en un periodo de la entrada, la tensión de salida del OpAmp1 también es periódica. La siguiente gráfica ilustra lo que sucede con los condensadores y la tensión  $v_1(t)$  entre 0 y  $T$ . Si analizamos ahora el Schmitt trigger, vemos que está excitado por la señal periódica  $v_1(t)$ .



Para analizar la salida del comparador, tenemos que asumir un estado de la misma ( $\pm V_{CC}$ ) y luego verificarlo. Como inicialmente los condensadores están descargados,  $v_1$  es nulo. Como ambos umbrales del Schmitt trigger son negativos, la pata - va a ganar y es razonable suponer que inicialmente  $v_o(t) = -V_{CC}$ . El respectivo umbral es

$$e_{+V_{CC}}^+ = -\frac{2V_{CC}}{3}$$

En el tramo  $[0, T/4]$ , se cumple que  $v_1(t) < -\frac{2V_{CC}}{3}$  y no se llega al umbral. La salida se mantiene en  $-V_{CC}$ . En el tramo  $[T/4, T/2]$ ,  $v_1$  decrece linealmente desde 0 y llega al umbral de conmutación, ya que  $v_1(t = T/2) = v_{C20} = -\frac{3V_{CC}}{4}$ . El comparador conmutará en  $t_1^* = T/4 + t^*$ , con  $t^*$  tal que

$$-\frac{V_{CC}}{RC_2} t^* = -\frac{2V_{CC}}{3} \Rightarrow t^* = \frac{2}{3} RC_2 = \frac{2}{3} \frac{RC_1}{3} = \frac{2T}{9} \Rightarrow t_1^* = \frac{T}{4} + \frac{2T}{9} = \frac{17}{36} T < \frac{T}{2}$$

En este instante el comparador conmuta y lo hace también su umbral, pasando a  $-\frac{V_{CC}}{3}$ . Al llegar a  $T/2$ , la salida del OpAmp1 conmuta a un valor superior a dicho umbral, por lo que vuelve a ganar la pata -. En  $3T/4$ , la salida de OpAmp 1 vuelve a ser la tensión de  $C_2$ , por lo que vuelve a ganar la pata +, ya que

$$v_{C20} < -\frac{2V_{CC}}{3}$$

A partir de ese instante, la tensión  $v_1(t)$  decrece linealmente hacia 0, alcanzando el umbral  $-\frac{V_{CC}}{3}$  en el instante  $t_2^* = \frac{3T}{4} + t'''^*$ , con

$$\begin{aligned} v_1(t'''^*) &= v_{C20} + \frac{V_{CC}}{RC_2} t'''^* = -\frac{3V_{CC}}{4} + \frac{V_{CC}}{RC_2} t'''^* = -\frac{V_{CC}}{3} \Rightarrow t'''^* = RC_2 \left( -\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{5RC_2}{12} = \frac{5RC_1}{36} = \frac{5T}{36} \Rightarrow t_2^* = \frac{3T}{4} + \frac{5T}{36} = \frac{32}{36} T = \frac{8}{9} T \end{aligned}$$

En ese instante el comparador vuelve a conmutar a  $-V_{CC}$  y se alcanza el fin del periodo con las mismas condiciones que en  $t = 0$ , por lo que el sistema está en régimen.

