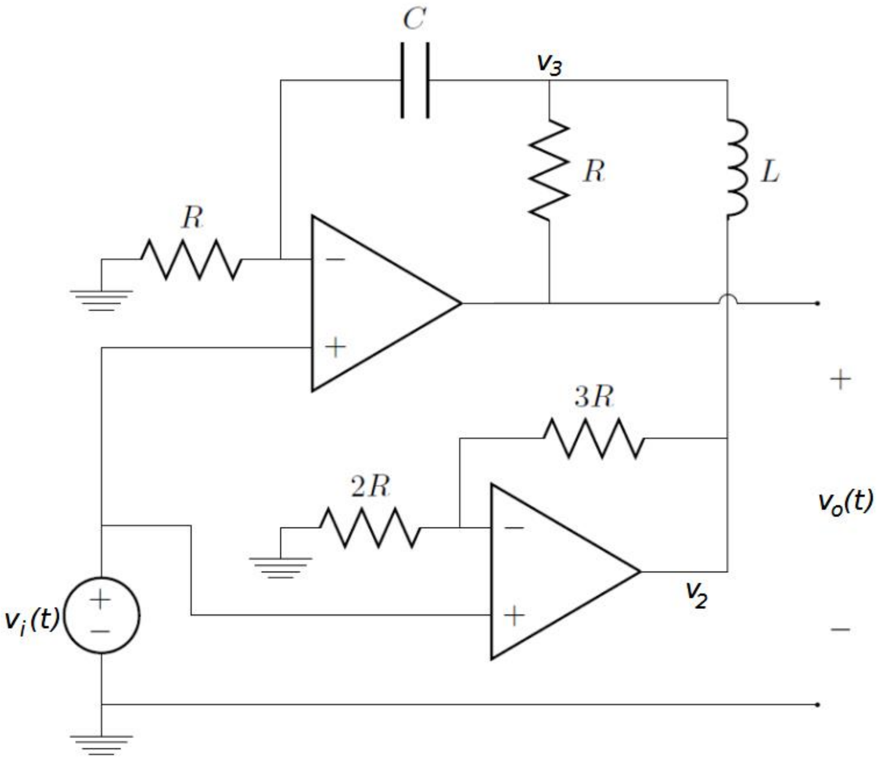
Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2018

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

En el circuito de la figura, los amplificadores operacionales son ideales.



(a) i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

ii) Mostrar que si $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{1}{RC}$, la expresión de $H(s)$ se reduce a

$$H(s) = 2.\frac{s^2 - \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2}$$

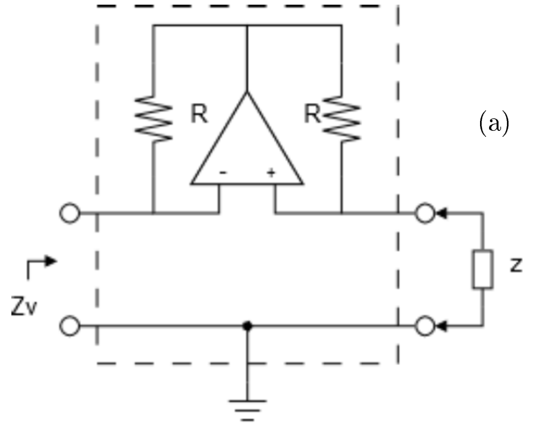
(b) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$, hallando los valores exactos en los puntos notables.

(c) Supongamos que los operacionales se alimentan a $\pm V_{cc}$.

i) Hallar la respuesta a un escalón en la entrada de amplitud $E = \frac{V_{cc}}{3}$.

ii) Determinar, si existe, un instante T en el que alguno de los operacionales satura.

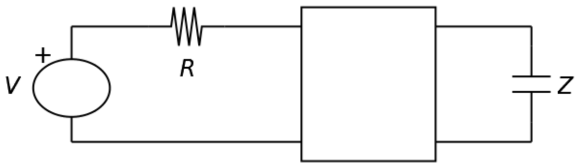
Problema 2



(a) i) Se considera el cuadripolo de la figura, con el operacional ideal. Hallar los parámetros (A, B, C, D).

ii) Mostrar que si se carga el lado 2 con una impedancia Z, la impedancia vista del lado 1 vale $-Z$.

(b) Con el cuadripolo de la parte anterior se arma el circuito siguiente, que analizaremos en régimen sinusoidal, alimentado por una fuente de tensión $v(t) = \sqrt{2}E\cos(100\pi t)$ y cargado del lado 2 por un condensador de valor C.

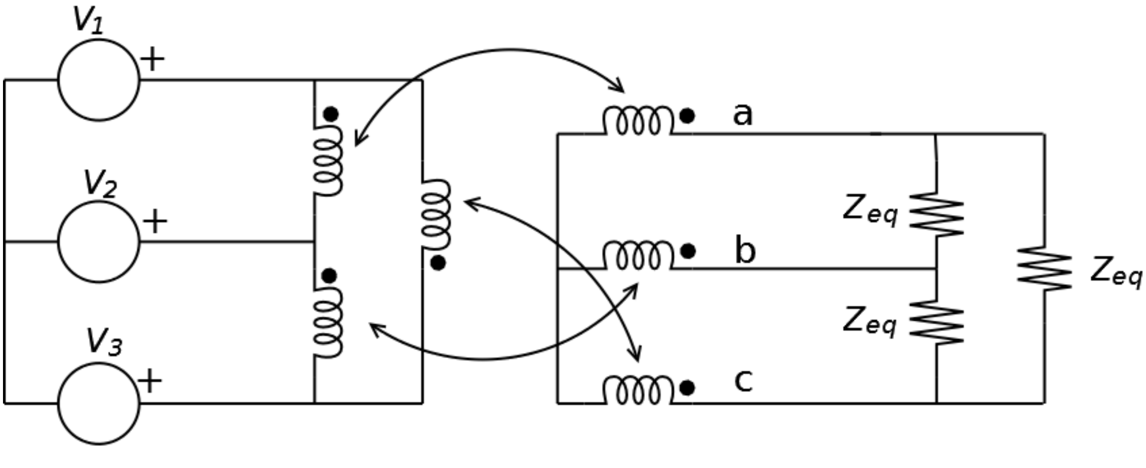


i) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

ii) Dibujar un diagrama fasorial que incluya la tensión y corriente de la fuente y la tensión y corriente del condensador.

iii) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

(c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en el que la impedancia Z_{eq} es la que ve la fuente de la parte b) (antes de compensar la reactiva), el sistema de fuentes trifásico es equilibrado y perfecto, de $50Hz$ y valor eficaz E, y los transformadores son ideales, con $\frac{n_1}{n_2} = 2$.



i) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.

ii) Compensar la potencia reactiva, procurando compensar con los componentes de menor valor posible. Indicar qué elementos colocaría y el respectivo esquema de conexión (no es necesario calcular el valor).

Teoría de Circuitos

Examen de diciembre de 2018

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Enunciar el Teorema de Blondell.

(b) Demostrarlo para el caso de cargas en estrella.

(c) Describir el método de los dos vatímetros.

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = -K.\frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + (\omega_1 + \omega_2)(j\omega) + \omega_1\omega_2}$$

siendo K, ω_0, ω_1 y ω_2 estrictamente positivos y $\frac{K\omega_0^2}{\omega_1\omega_2} = 20db$.

(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, **explicando claramente su obtención.**

(b) ¿Considerando régimen sinusoidal, existe alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema responde con una señal con la misma amplitud que la entrada?

Pregunta 3

(a) Definir potencia instantánea $p(t)$ y la potencia media en régimen sinusoidal P.

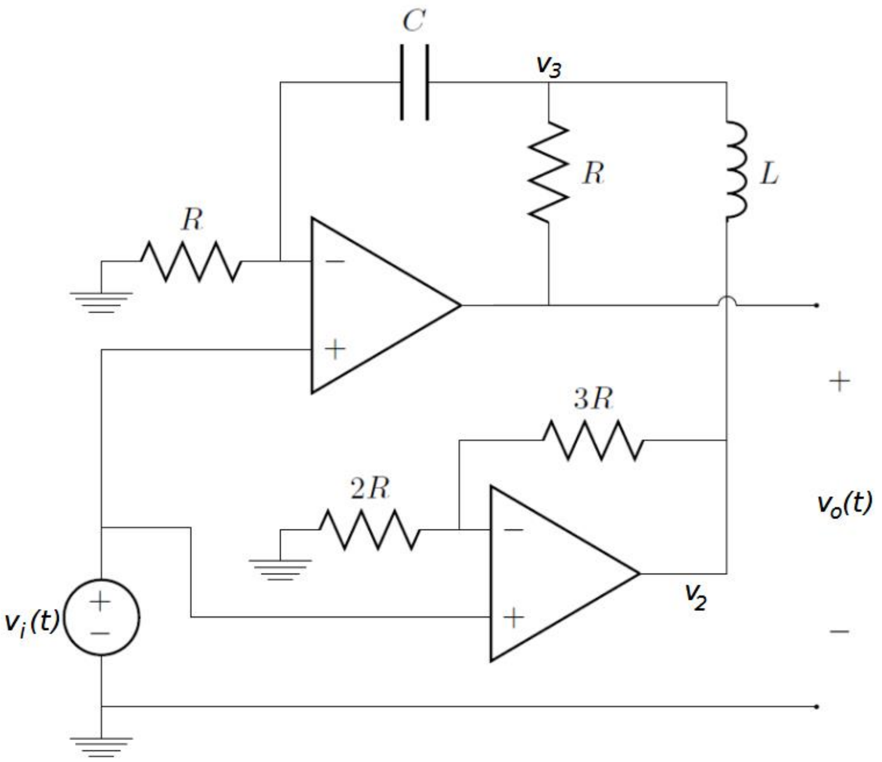
(b) A partir de la definición anterior, probar la expresión $P = re(V\bar{I})$, siendo V e I los fasores asociados a la tensión y la corriente involucrados, en valores eficaces.

Pregunta 4

Enunciar y demostrar los Teoremas de valor final y de valor inicial para la Transformada de Laplace de funciones.

Solución

Problema 1



(a) i) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. observemos primero que el operacional de abajo está en un configuración no inversora. Su salida es

$$\boxed{v_2(t) = \left(1 + \frac{3R}{2R}\right) v_i(t) = \frac{5}{2} v_i(t)}$$

Mireos ahora el operacional de arriba, que también está en una configuración no inversora. Denotemos por $v_3(t)$ la tensión del punto a la derecha del condensador, medida respecto de tierra. Sigamor el camino de la corriente por la resistencia R conectada de la pata $-$ a tierra. Trabajamos en Laplace, con datos previos nulos:

$$\frac{-V_i(s)}{R} = (V_i(s) - V_3(s))Cs = \frac{V_3(s) - V_o(s)}{R} + \frac{V_3(s) - V_2(s)}{Ls}$$

De la primera igualdad obtenemos

$$-V_i \left[\frac{1}{R} + Cs\right] = -V_3(s)Cs \Rightarrow \boxed{V_3(s) = \left[\frac{RCs + 1}{RCs}\right] V_i(s)}$$

De la segunda,

$$\frac{-V_i(s)}{R} = -\frac{V_o(s)}{R} + \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls}\right] V_3(s) - \frac{V_2(s)}{Ls}$$

Operando

$$-V_i(s)\frac{Ls}{RLs} = -V_o(s)\frac{Ls}{RLs} + \left[\frac{Ls + R}{RLs}\right] \left[\frac{RCs + 1}{RCs}\right] V_i(s) - \frac{\frac{5}{2}R}{RLs} V_i(s)$$

$$-V_i(s)Ls = -V_o(s)Ls + [Ls + R] \left[\frac{RCs + 1}{RCs}\right] V_i(s) - \frac{5}{2} RV_i(s)$$

$$-V_i(s)RLCs^2 = -V_o(s)RLCs^2 + [Ls+R]\,[RCs+1]\,V_i(s) - \frac{5}{2}R^2CsV_i(s)$$

$$V_i(s)\left[\frac{5}{2}R^2Cs - [R+Ls][RCs+1] - RLCs^2\right] = -RLCs^2V_o(s)$$

De donde

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-\frac{5}{2}R^2Cs + [R+Ls][RCs+1] + RLCs^2}{RLCs^2} =$$

$$= \frac{RLCs^2 + (L+R^2C)s + R - \frac{5}{2}R^2Cs + RLCs^2}{RLCs^2} = \frac{2RLCs^2 + \left(L - \frac{3}{2}R^2C\right)s + R}{RLCs^2} =$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = 2.\frac{s^2 + \left(\frac{L-\frac{3}{2}R^2C}{2RLC}\right)s + \frac{1}{2LC}}{s^2} = 2.\frac{s^2 + \left(\frac{1}{2RC} - \frac{3R}{4L}\right)s + \frac{1}{2LC}}{s^2}}$$

ii) Mostrar que si $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{1}{RC}$, la expresión de $H(s)$ se reduce a $H(s) = 2.\frac{s^2-\omega_0 s+\omega_0^2}{s^2}$.

Observemos que $\omega_0^2 = \frac{1}{2LC}$. Además.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2LC} = \frac{1}{2}\frac{R}{L}\frac{1}{RC} = \frac{1}{2}\frac{R}{L}\omega_0 \Rightarrow \frac{R}{L} = 2\omega_0 \Rightarrow \frac{3}{4}\frac{R}{L} = \frac{3}{2}\omega_0$$

Entonces,

$$\frac{1}{2RC} - \frac{3}{4}\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{2} - \frac{3}{2}\omega_0 = -\omega_0$$

De donde

$$\boxed{H(s) = 2.\frac{s^2 - \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2}}$$

(b) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(s)$.

El numerador de H puede escribirse como $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, con $\omega_n = \omega_0$ y $\zeta = -\frac{1}{2}$, por lo que tenemos dos raíces complejas conjugadas, de módulo $\omega_n = \omega_0$ y parte real $-\zeta\omega_n = \frac{\omega_0}{2}$. En el denominador, tenemos una raíz doble en el origen.

Para deducir los diagramas de Bode, hacemos un análisis por bandas, discutiendo según ω mucho mayor o mucho menor que ω_n:

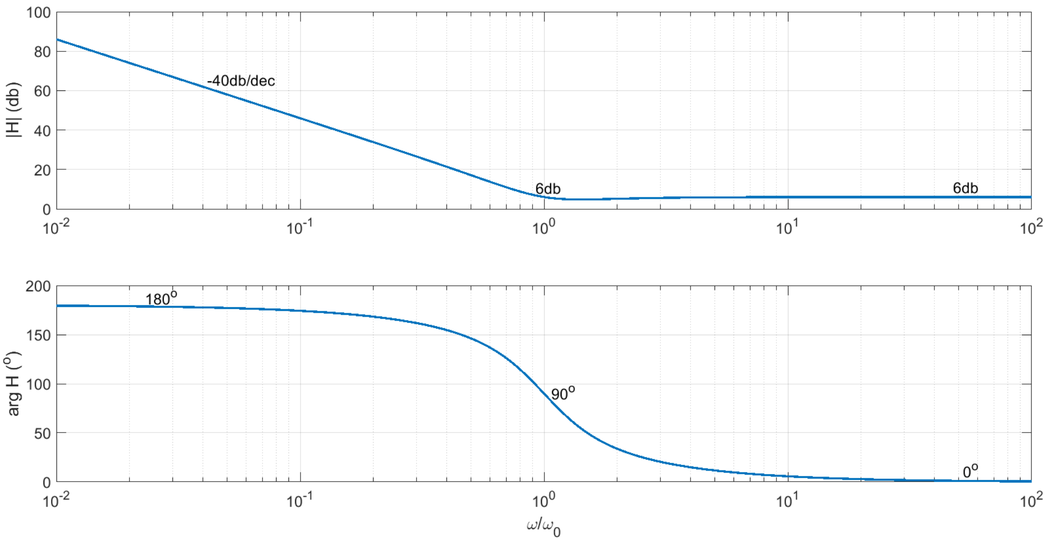
$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx 2.\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20\log(2\omega_n^2) - 40\log(\omega)\;db \\ \\ arg\,[H(j\omega)] \approx -\pi \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \approx 2.\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 6db \\ \\ arg\,[H(j\omega)] \approx 0(\pm 2\pi) \end{cases}$$

La variación total admisible es de $\pm 180^o$, por tratarse de un par de raíces complejas conjugadas. Para discriminar si es en sentido horario o antihorario, evaluamos en $\omega = \omega_n$:

$$H(j\omega)|_{\omega=\omega_n} = 2.\frac{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2}{(j\omega_n)^2} = 2.\frac{2j\zeta}{-1} = 2j = 2\angle\frac{\pi}{2}$$

Los diagramas de Bode se muestran a continuación. Observemos en particular que $|H(j\omega_n)| \approx +6db$ y que la presencia de ζ de módulo menor que 1 implica que existe un *sobretiro hacia abajo* cerca de ω_0.



(c) Supongamos que los operacionales se alimentan a $\pm V_{cc}$.

i) Hallar la respuesta a un escalón en la entrada de amplitud $E = \frac{V_{cc}}{3}$.

Planteamos en Laplace:

$$V_o(s) = H(s).V_i(s) = 2.\frac{s^2 - \omega_0 s + \omega_0^2}{s^2}.\frac{E}{s} = \frac{2E}{s} - \frac{2E\omega_0}{s^2} + \frac{2E\omega_0^2}{s^3}$$

Antitransformando,

$$\boxed{v_o(t) = Y(t).2E\left[1 - \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 t^2}{2}\right] = Y(t).\frac{2V_{cc}}{3}\left[1 - \omega_0 t + \frac{\omega_0^2 t^2}{2}\right]}$$

ii) Determinar, si existe, un instante T en el que alguno de los operacionales satura.

El segundo operacional no satura, pues $v_2(t) = \frac{5}{2}v_i(t) = \frac{5}{2}\frac{V_{cc}}{3} = \frac{5}{6}V_{cc}$.
Veamos el primero. Impongamos

$$v_o(T) = \frac{2V_{cc}}{3}\left[1 - \omega_0 T + \frac{\omega_0^2 T^2}{2}\right] = \mp V_{cc} \Rightarrow 1 - \omega_0 T + \frac{\omega_0^2 T^2}{2} = \mp\frac{3}{2}$$

Escribamos $x = \omega_0 T$ y veamos los dos casos:

- $1 - x + \frac{x^2}{2} = -\frac{3}{2}$,

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \quad \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

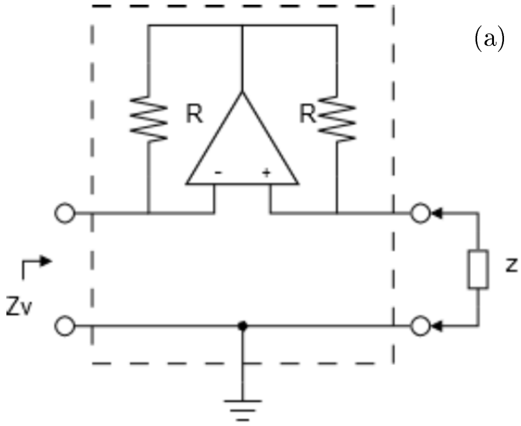
- $1 - x + \frac{x^2}{2} = +\frac{3}{2}$,

$$\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Tomamos la raíz positiva y obtenemos

$$\boxed{T = \frac{1 + \sqrt{2}}{\omega_0}}$$

Problema 2



(a) i) Se considera el cuadripolo de la figura, con el operacional ideal. Hallar los parámetros (A, B, C, D).

Observemos que debido al cortocircuito virtual de las patas $-$ y $-$ del operacional, consecuencia de la ganancia infinita, las resistencias R están *virtualmente en paralelo* y circula por ellas la misma corriente. De la descripción de un cuadripolo a través de las constantes generales, sabemos que

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Entonces, $A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Por el cortocircuito virtual, $V_1 = V_2$, de donde $A = 1$.

En la misma línea, $B = \frac{V_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Al imponer $V_2 = 0$, tenemos también $V_1 = 0$, de donde $B = 0$.

Miremos ahora $D = \frac{I_1}{-I_2}\Big|_{V_2=0}$. Pensemos una fuente de corriente inyectando $-I_2$. Por la impedancia de entrada infinita del operacional, esa corriente circula por la resistencia R desde la pata $+$ hacia la salida del operacional y coincide con la corriente I_1 que circula por la otra R desde la pata $-$ a la salida del operacional. Entonces $D = -1$.

Finalmente, consideremos $C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$. Nuevamente, por la igualdad de las corrientes, obtenemos $C = 0$.

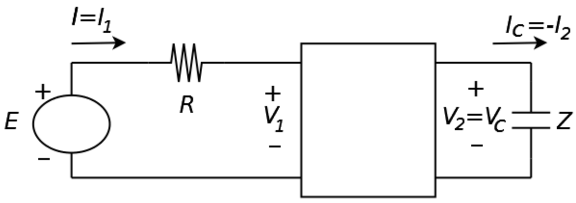
ii) Mostrar que si se carga el lado 2 con una impedancia Z, la impedancia vista del lado 1 vale $-Z$.

La impedancia vista del lado 1 vale $Z_V = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2}$. La impedancia de carga del lado 2 verifica la identidad $Z = \frac{V_2}{-I_2}$ (recordar que I_2 se toma entrante al cuadripolo). Entonces

$$Z_V = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A\frac{V_2}{-I_2} + B}{C\frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ + B}{CZ + D} = \frac{Z}{-1} = -Z \quad , \quad \forall Z$$

(b) Se considera el circuito anterior funcionando en régimen sinusoidal, alimentado del lado 1 por la fuente de tensión $v(t) = \sqrt{2}E\cos(100\pi t)$ y cargado del lado 2 por un condensador de valor C. La potencia activa consumida a la fuente la consume la resistencia R y vale

i) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.



Por lo anterior, podemos considerar un circuito equivalente que sea simplemente la fuente sinusoidal alimentando la serie de R con la impedancia opuesta a la del condensador $Z_c = \frac{1}{Cj\omega}$, con $\omega = 100\pi$. Entonces, la impedancia que ve la fuente en régimen sinusoidal vale $Z_{eq} = R - \frac{1}{Cj\omega} = R + j\frac{1}{C\omega} = R + jX$, que es inductiva, pues su reactancia X es positiva. Trabajamos en valores eficaces.

$$P = R.|I|^2 = R\left|\frac{E}{R + jX}\right|^2 = |E|^2.\frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{RE^2}{R^2 + X^2}$$

La potencia reactiva la consume la reactancia $X = \frac{1}{C\omega}$ y vale

$$Q = X.|I|^2 = X\left|\frac{E}{R+jX}\right|^2 = |E|^2.\frac{X}{R^2+X^2} = \frac{XE^2}{R^2+X^2}$$

La potencia aparente vale

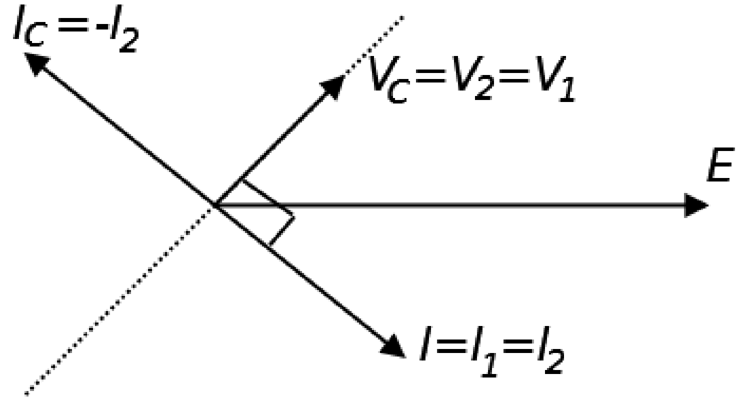
$$S = E.\bar{I} = E.\overline{\frac{E}{R+jX}} = \frac{|E|^2}{R-jX} = \frac{R+jX}{R^2+X^2}E^2 = P+jQ.$$

ii) Dibujar un diagrama fasorial que incluya la tensión y corriente de la fuente y la tensión y corriente del condensador.

La corriente que entrega la fuente vale

$$I = \frac{E}{R+\frac{j}{C\omega}} = \frac{EC\omega}{RC\omega+j}$$

Si denotamos por V_1 y V_2 las tensiones del lado 1 y lado 2 del cuadripolo, sabemos que $V_C = V_2 = V_1 = \frac{E\frac{j}{C\omega}}{R+\frac{j}{C\omega}} = \frac{jE}{RC\omega+j}$ y resulta ser ortogonal a la corriente de la fuente. Finalmente, la corriente de la fuente es la I_1 del cuadripolo, que es igual a la I_2 y opuesta a la corriente I_C del condensador.



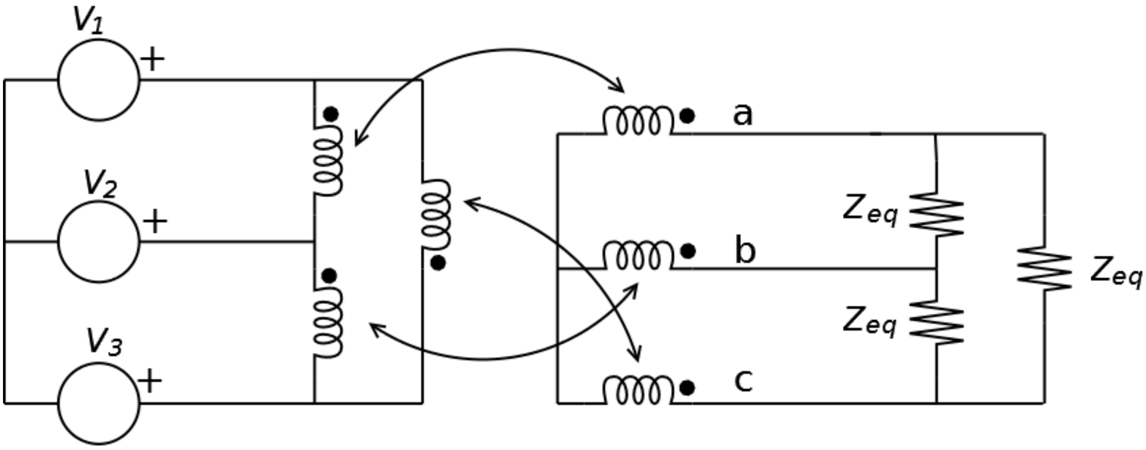
iii) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, sin alterar la potencia activa. Indicar qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

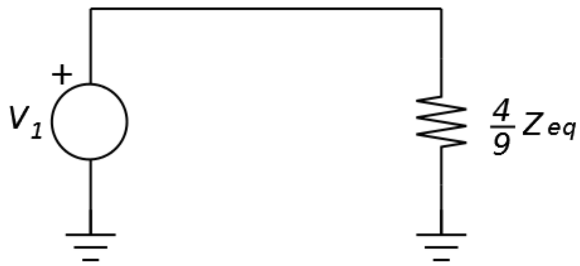
Para compensar la potencia reactiva sin alterar la reactiva, colocamos un condensador C' en paralelo con la fuente, que entregue la reactiva que consume el cuadripolo:

$$Q_{C'} = -E^2C'\omega = -\frac{XE^2}{R^2+X^2} \Rightarrow C' = \frac{X}{(R^2+X^2)\omega} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\left(R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2\right)\omega} = \frac{C}{(R^2C^2\omega^2+1)}$$

(c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en el que la impedancia Z_{eq} es la que ve la fuente de la parte b), el sistema de fuentes trifásico es equilibrado y perfecto, de valor eficaz E y los transformadores son ideales, con $\frac{n_1}{n_2} = 2$.

i) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por la carga trifásica.





El triángulo de impedancias Z_{eq} podemos convertirlo en una estrella equivalente de impedancias de valor $Z_{eq}/3$. Estas impedancias pasan al primario del transformador trifásico multiplicadas por la relación de transformación al cuadrado y formando un triángulo de impedancias $\frac{4}{3}Z_{eq}$. Finalmente, podemos transfigurar este triángulo en una nueva estrella, de impedancias de valor $\frac{4}{9}Z_{eq}$. Obtenemos entonces el equivalente monofásico de la figura: Las potencias trifásicas valen

$$P_T = 3.E^2 \frac{\frac{4}{9}R}{\left(\frac{4}{9}\right)^2 (R^2+X^2)} = \frac{27}{4}\frac{RE^2}{R^2+X^2} \quad , \quad Q_T = \frac{27}{4}\frac{XE^2}{R^2+X^2} \quad , \quad S_T = P_T + jQ_T$$

ii) Compensar la potencia reactiva, procurando compensar con los componentes de menor valor posible. Indicar qué elementos colocaría y el respectivo esquema de conexión (no es necesario calcular el valor).

Para compensar la potencia reactiva total consumida al sistema trifásico de fuentes, podemos colocar un triángulo de condensadores en paralelo con la carga. El valor del condensador sale directamente del equivalente monofásico, que permite obtener una estrella de condensadores que compensa la reactiva, y que luego podemos convertir a triángulo para lograr la misma reactiva con condensadores más pequeños. Observemos además que si hacemos la compensación del lado del primario del transformador trifásico, obtenemos condensadores más chicos que si lo hiciéramos del lado del secundario, ya que la impedancia del condensador se multiplica por 4 o, equivalentemente, la capacidad se divide entre 4.