

**MOTORES**

**DE**

**COMBUSTIÓN**

**INTERNA**

**Primera parte: Octubre 2003**

*Autores: Ing. Augusto Corallo  
Ing. Teodoro Vassallo  
Ing. Hugo Dall'Orto*

## **INDICE**

- **REPASO DE TERMODINÁMICA**
- **MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA**
  - 1.- **El Motor de Combustión Interna**
  - 2.- **Método de estudio del problema**
  - 3.- **Ciclo de aire**
  - 4.- **Termodinámica del medio aire-fuel**
  - 5.- **Ciclo aire-combustible**
  - 6.- **Ciclos reales comparados con ciclos aire-combustible**
  - 7.- **El Motor de 4 Tiempos**
  - 8.- **El Motor de 2 Tiempos**
  - 9.- **Combustión**
  - 10.- **Sobrealimentación**
  - 11.- **Turbinas de Gas**
  - 12.- **Similitud**
  - 13.- **Pérdidas y Fricciones**
- **GRÁFICOS PARA EJERCICIOS PRÁCTICOS**

## REPASO DE TERMODINÁMICA

Vamos a utilizar una visión macroscópica, sin entrar al análisis “fino” de la estructura de la materia. Los sistemas con los que se trabaja en ingeniería son sistemas continuos. Son una generalización de los sistemas en equilibrio.

Están formados por gran número de partículas y se caracterizan porque si tomo un elemento de volumen cualquiera  $dV$ , puedo hacer  $dV$  suficientemente pequeño como para definir una propiedad termodinámica cuando  $dV \rightarrow 0$ .

Por ejemplo la densidad, como 
$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}$$

La termodinámica estudia sistemas en equilibrio. Las propiedades se definen a partir de sistemas en equilibrio. Un sistema dado se encuentra en equilibrio cuando no se observan variaciones en sus variables termodinámicas, o coordenadas de estado:

$P$	$x_1$
$T$	$x_2 \dots$
$V$	$x_n$
$N_1, N_2 \dots$	$x_{n+1} \dots$
	$x_m$

Por lo general hay un número mínimo de coordenadas de estado que definen el estado del sistema.

Esto quiere decir que hay relaciones entre esas variables de estado.

Son las llamadas ecuaciones de estado.

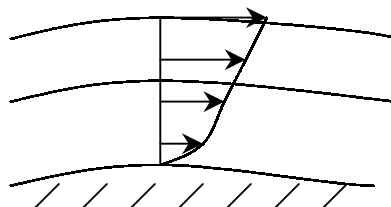
Se podrían exponer:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1 \dots x_n) \\ &\vdots \\ x_m &= f_m(x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

La experiencia determina la cantidad de variables independientes.

Sistemas no homogéneos: algunas de sus partes tienen propiedades distintas que el resto. Interesa sobre todo cuando varían continuamente.

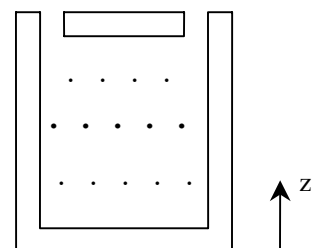
Ejemplo 1: Escorrimiento de un fluido alrededor de un sólido. Hay una capa límite. La velocidad varía en forma continua.



Ejemplo 2: Columna de gas ideal en un campo gravitatorio.

Se supone  $T = \text{cte}$ .

$$p = p_1 e^{-\frac{\rho g z}{RT}} \quad p = p(z)$$



La idea es que las ecuaciones de estado que valían para el sistema homogéneo, valen para cada porción del sistema continuo no homogéneo. La experiencia nos dice que esto es así.

En un medio continuo se puede definir la densidad por lo tanto para cualquier magnitud extensiva  $\phi = \phi(p, t)$  se tendrá una cantidad específica  $\varphi = \frac{d\phi}{dm}$  siendo  $dm = \rho dV$   
 $dV$  – elemento de volumen

Consideramos un sector del espacio  $\Omega$ , limitado por una superficie  $\partial\Omega$ , entonces se tendrá:

$$\phi = \int_{\Omega} \varphi \rho dV$$



Ecuación del balance:

Por el teorema de derivación bajo el signo de integral se puede expresar la variación de

$$\phi \text{ en el tiempo como sigue: } \frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \rho dV}_{(I)} = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial(\varphi \rho)}{\partial t} dV}_{(II)} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \varphi (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA}_{(III)}$$

- (I) – Variación de  $\phi$  en el sistema cerrado
- (II) – Variación de  $\phi$  en el sistema abierto que coincide en  $t$  con el anterior (variación local)
- (III) – Flujo de  $\phi$  a través de  $\partial\Omega$  asociado a la masa  $\rho \varphi (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA$  que atraviesa la frontera.

### Balance de masa

$$\varphi = \rho = \frac{dM}{dV}$$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA$$

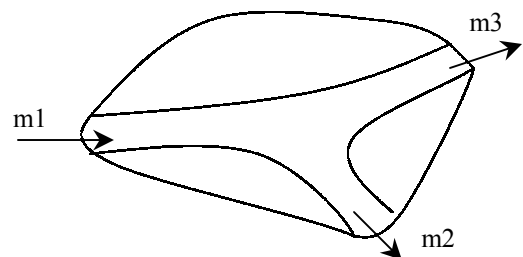
Conservación de la masa:  $\boxed{\frac{dM}{dt} = 0} \rightarrow \frac{dM}{dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) \right] dV = 0$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0}$$

Ecuación de continuidad

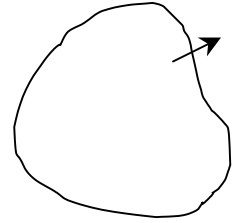
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \frac{\partial M}{\partial t}$$

masa entrante = masa saliente + aumento de masa



**Balance de energía en un sistema cerrado**

$$\delta W = -p_{ext} dV$$



Energía interna:  $\Delta U|_I^F = W_{adiabático}_{IF}$

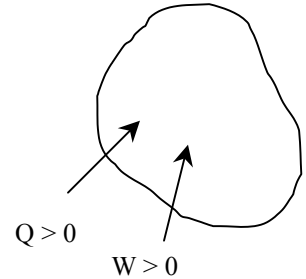
Dados dos estados  $I, F$  de un sistema, la variación de  $U$  es igual al trabajo en un proceso adiabático que une ambos estados.

Primer principio:  $Q_{IF} = \Delta U|_I^F - W_{IF}$  para un proceso cualquiera de un sistema cerrado.

$$U_F - U_I = Q_{IF} + W_{IF}$$

Proceso cuasiestático diferencial:  $dU = \delta W + \delta Q$

$$\frac{dU}{dM} = \frac{\delta W}{dM} + \frac{\delta Q}{dM} \rightarrow du = \delta w + \delta q$$



Calor específico:  $c = \frac{\delta q}{dT}$

Calor específico a presión constante:  $c_p$

Calor específico a volumen constante:  $c_v$

Índice politrópico adiabático:

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

Sistema hidrostático:  $\delta w = -p_{ext} dv \rightarrow du = \delta q - pdv$

Si  $v = cte \rightarrow du_v = \delta q = c_v dT_v \rightarrow c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$

Si  $p = cte \rightarrow du_p = \delta q_p - pdv_p \rightarrow \frac{\delta q_p}{dT_p} = \frac{du_p}{dT_p} + p \frac{dv_p}{dT_p}$

$c_p = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$  pues  $h = u + pv$

Gases ideales:

$$pv = RT$$

$$c_p - c_v = R$$

$$du = c_v dT = \frac{R}{k-1} dT = \frac{d(pv)}{k-1}$$

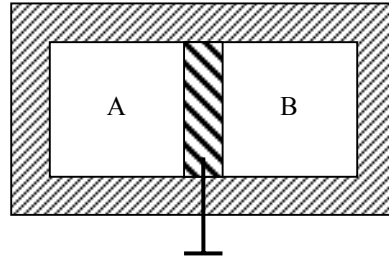
$$dh = c_p dT = \frac{kR}{k-1} dT = \frac{kd(pv)}{k-1}$$

En un proceso adiabático es:  $du_{ad} = -pdv$

$$dh = du + d(pv) = -pdv + d(pv) = vdp \rightarrow dh_{ad} = vdp$$

## Problema Fundamental de la Termodinámica

Se considera un sistema aislado, compuesto por dos subsistemas A y B, separados por un pistón impermeable adiabático y trabado. En estas condiciones los subsistemas A y B son aislados.



Si le quitamos la traba, dejando moverse al pistón, éste se va a mover hacia una nueva ubicación. Habrá una redistribución de la energía, un sistema realizará trabajo sobre el otro.

Si en vez de quitar la traba, hacemos el pistón diatérmico, la transferencia de energía se hará bajo la forma de calor.

Podemos también hacer al pistón permeable, permitiendo el intercambio de moléculas entre los subsistemas.

Al realizar uno de estos cambios decimos que liberamos vínculos termodinámicos.

Supongamos que antes de intervenir en el sistema liberando uno o más de esos vínculos teníamos que los valores de las variables en cada subsistema eran:

$$U_A, V_A, N_{A1}, N_{A2}, \dots, N_{Ar}$$

$$U_B, V_B, N_{B1}, N_{B2}, \dots, N_{Br}$$

El problema fundamental de la termodinámica consiste en hallar estos valores cuando se llega al equilibrio, luego de liberar uno o más vínculos termodinámicos.

## Entropía

Se postula la existencia de una función  $S$  llamada entropía, definida en los estados de equilibrio de los sistemas físicos.

$S$  es función de los parámetros que determinan el equilibrio.

Para un sistema con  $\alpha$  subsistemas,  $S$  será función de:

$$U_1, V_1, N_1^{(1)}, \dots, N_r^{(1)}, U_2, V_2, N_1^{(2)}, \dots, N_r^{(2)}, \dots, U_\alpha, V_\alpha, N_1^{(\alpha)}, \dots, N_r^{(\alpha)}$$

Los valores que adoptan las variables termodinámicas al liberarse un vínculo son aquellos que maximizan la entropía  $S$  del sistema compuesto, definida sobre todos los posibles estados de equilibrio del sistema al variar en forma continua dicho vínculo.

Se postula que  $S$  de un sistema compuesto es aditiva en las entropías de los sistemas componentes y que es una función continua, derivable y monótona creciente de la energía interna total del sistema en consideración.

De lo anterior se deduce que:

Si tengo un sistema de  $\alpha$  componentes, su entropía es  $S = \sum_{i=1}^{\alpha} S_i$

En particular, un sistema homogéneo que contiene  $N$  moles, se puede considerar dividido en  $N$  partes con molaridad unidad

$$S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_r) = NS\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, \frac{N_1}{N}, \dots, \frac{N_r}{N}\right)$$

$$\text{Sea } \lambda = \frac{1}{N} \therefore \lambda^1 S(U, V, N_1, \dots, N_r) = S(\lambda^1 U, \lambda^1 V, \lambda^1 N_1, \dots, \lambda^1 N_r)$$

Luego  $S$  es homogénea de grado 1.

Si el sistema tiene un solo componente:

$$\frac{1}{N} S(U, V, N) = S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right) = s(u, v) \quad s : \text{entropía específica}$$

Dado  $S = S(U, V, N_1, \dots, N_r)$ , por las propiedades de  $S$  es posible

$$\text{despejar } U = U(S, V, N_1, \dots, N_r) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} > 0$$

Toda la información que se puede obtener de una ecuación se puede obtener de la otra. A ambas se las conoce como la **ecuación fundamental de la termodinámica en su representación entrópica y energética respectivamente**.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_1, \dots, N_r} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N_1}\right)_{S, V, N_2, \dots, N_r} dN_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial N_r}\right)_{S, V, N_1, \dots, N_{r-1}} dN_r$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} = T^* \quad \text{Temperatura absoluta termodinámica}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_1, \dots, N_r} = -p^*$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N_j}\right)_{S, V, N_k, k \neq j} = \mu_j \quad \text{Potencial químico}$$

Para un sistema cerrado en donde no hay reacción química  $dN_k = 0 \rightarrow$

$$dU = T^* dS - p^* dV$$

Por otro lado, del primer principio se había llegado a que  $dU = \delta Q - pdV$ ,

$$\text{luego: } T^* dS - p^* dV = \delta Q - pdV$$

Tanto  $S$  como  $V$  son variables independientes y  $\delta Q$  es independiente de  $pdV \rightarrow$

$$p^* dV = pdV \quad \text{y entonces } \boxed{p^* = p}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_1, \dots, N_r} = -p$$

$$\text{y } \delta Q = T^* dS$$

Se puede demostrar que  $T^*$  coincide con el concepto de temperatura instrumental definida por el termómetro de gas a  $V = \text{cte}$ . A partir de ahora tomaremos  $T^* = T$

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}} \quad \text{y} \quad \boxed{\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}}$$

En un proceso a  $p = \text{cte}$  es  $\delta Q = Nc_p dT$

$$\Delta S = Nc_p \int_1^2 \frac{dT}{T} = Nc_p L \frac{T_2}{T_1}$$

Las derivadas de  $U$  se denominan **ecuaciones de estado**:

$$p = p(S, V, N_1, \dots, N_r)$$

$$T = T(S, V, N_1, \dots, N_r)$$

$$\mu_j = \mu_j(S, V, N_1, \dots, N_r)$$

$U$  y  $S$  son homogéneas de grado 1, sus derivadas son homogéneas de grado 0.

$$T(\lambda S, \lambda V, \lambda N_1, \dots, \lambda N_r) = \lambda^0 T(S, V, N_1, \dots, N_r)$$

La temperatura, presión y potencial químico del sistema son iguales a los de una porción cualquiera del sistema, son variables intensivas.

Para un sistema con un solo componente:

$$U = U(S, V, N)$$

$$\lambda U = U(\lambda S, \lambda V, \lambda N)$$

$$\text{Sea } \lambda = \frac{1}{N} \therefore U(S, V, N) = NU \left( \frac{S}{N}, \frac{V}{N}, 1 \right) = Nu(s, v)$$

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N} = N \left( \frac{\partial u(s, v)}{\partial s} \right)_v \cdot \frac{1}{N} = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v \rightarrow \boxed{\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = T}$$

$$\text{Análogamente } \boxed{\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -p}$$

$$\boxed{dU = TdS - pdV}$$

$$\boxed{du = Tds - pdv}$$



### Ecuación de Euler

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N_1, \dots, \lambda N_r) = \lambda^1 U(S, V, N_1, \dots, N_r)$$

Derivando respecto de  $\lambda$  es:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda S}\right) \cdot S + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda V}\right) \cdot V + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda N_1}\right) \cdot N_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda N_r}\right) \cdot N_r = U$$

La expresión anterior vale para todo  $\lambda$ , en particular para  $\lambda=1$ :

$$U = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) \cdot S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) \cdot V + \left(\frac{\partial U}{\partial N_1}\right) \cdot N_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial N_r}\right) \cdot N_r$$

Luego es: 
$$U = TS - pV + \mu_1 N_1 + \dots + \mu_r N_r$$

Despejando: 
$$S = \frac{U}{T} + \frac{p}{T} V - \left(\frac{\mu_1}{T}\right) N_1 + \dots - \left(\frac{\mu_r}{T}\right) N_r$$

**Expresión de la ecuación fundamental de la termodinámica en la forma de Euler, en su representación energética y entrópica.**

Observar que de  $U$  o de  $S$  puedo obtener  $r+2$  derivadas parciales, que son las llamadas ecuaciones de estado. Si conozco las  $r+2$  ecuaciones de estado, sustituyendo puedo obtener  $S$  o  $U$ .

### Ecuaciones de Gibbs-Duhem

Dada  $U = U(S, x_1, \dots, x_t)$  función de  $t+1$  variables quedan definidas las  $t+1$  ecuaciones de estado:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\partial U}{\partial S} = T(S, x_1, \dots, x_t) \\ p_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = p_1(S, x_1, \dots, x_t) \\ &\vdots \\ p_t &= \frac{\partial U}{\partial x_t} = p_t(S, x_1, \dots, x_t) \end{aligned} \right\} t + 1 \text{ ecuaciones de estado}$$

Todas ellas son homogéneas de grado 0, luego si tomamos  $\lambda = \frac{1}{x_t}$  resulta:

$$\left. \begin{aligned} T &= T\left(\frac{S}{x_t}, \frac{x_1}{x_t}, \dots, 1\right) \\ &\vdots \\ p_t &= p_t\left(\frac{S}{x_t}, \frac{x_1}{x_t}, \dots, 1\right) \end{aligned} \right\} t + 1 \text{ ecuaciones con } t \text{ variables}$$

Por tanto puedo despejar las  $t$  variables de las  $t$  primeras ecuaciones y sustituyendo en la última obtengo la función:

$$f(T, p_1, p_2, \dots, p_t) = 0$$
 que liga a todas las ecuaciones de estado.

Para un sistema con 1 solo componente:

$$T = T(S, V, N) = T(s, v, 1) = T(s, v)$$

$$p = p(S, V, N) = p(s, v, 1) = p(s, v)$$

$$\mu = \mu(S, V, N) = \mu(s, v, 1) = \mu(s, v)$$

De las 2 primeras se obtiene:  $s = s(T, p)$  y  $v = v(T, p)$  y sustituyendo en la última:

$$\mu = \mu(s(T, p), v(T, p)) = \mu(T, p)$$

Diferenciando la ecuación de Euler tenemos:  $U = TS - pV + \sum_{i=1}^r \mu_i N_i$

$$\rightarrow dU = TdS + SdT - pdV - Vdp + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i + \sum_{i=1}^r N_i d\mu_i$$

A su vez es:  $dU = TdS - pdV + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i$

$$\rightarrow \boxed{SdT - Vdp + \sum_{i=1}^r N_i d\mu_i = 0} \quad \underline{\text{1era. Ecuación de Gibbs-Duhem}}$$

La ecuación de Euler se escribe también:  $S = \frac{U}{T} + \frac{p}{T}V - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{T} N_i$

$$\rightarrow dS = \frac{1}{T}dU + Ud\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{p}{T}dV + Vd\left(\frac{p}{T}\right) - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{T}dN_i - \sum_{i=1}^r N_i d\left(\frac{\mu_i}{T}\right)$$

A su vez es:  $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{T}dN_i$

$$\rightarrow \boxed{Ud\left(\frac{1}{T}\right) + Vd\left(\frac{p}{T}\right) - \sum_{i=1}^r N_i d\left(\frac{\mu_i}{T}\right) = 0} \quad \underline{\text{2da. Ecuación de Gibbs-Duhem}}$$

Las ecuaciones son equivalentes. Se usa una u otra.

Para un sistema de un solo componente:

$$\boxed{SdT - Vdp + Nd\mu = 0}$$

$$\boxed{Ud\left(\frac{1}{T}\right) + Vd\left(\frac{p}{T}\right) - Nd\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0}$$

En un sistema con  $r$  componentes hay  $r+2$  ecuaciones de estado. Las ecuaciones de Gibbs-Duhem vinculan las  $r+2$  ecuaciones, de modo que quedan  $r+1$  independientes.

## Resultados para un sistema con un solo componente

Se definen:

Coefficiente de dilatación térmico: 
$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Coefficiente de compresibilidad isotérmico: 
$$k_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

Para gases ideales se tiene  $pv = RT$  y derivando resulta:  $\beta = \frac{1}{T}$  y  $k_T = \frac{1}{p}$

Calores específicos:  $c = \frac{\delta q}{dT}$  es una propiedad de la sustancia

$c_p, c_v$  : calores específicos a presión y volumen constante.

Del 1er. principio: 
$$du = \delta q - pdv$$

Entalpía  $h = u + pv \rightarrow$  
$$dh = \delta q + vdp$$

Un sistema con un solo componente tiene dos grados de libertad termodinámicos.

Hay 2 parámetros intensivos independientes:

$$u = u(p, v)$$

$$u = u(p, T)$$

$$u = u(v, T)$$

La ecuación fundamental es:  $u = u(s, v)$  o  $s = s(u, v)$

Las otras,  $u(T, v)$  por ej., no contienen toda la información, pues T es una derivada parcial  $T = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v$ . A pesar de ello, se utilizan las ecuaciones de estado.

$$u = u(T, p) \quad du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp$$

$$u = u(T, v) \quad du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

$$u = u(p, v) \quad du = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_p dv$$

Consideremos un proceso a  $v = cte$  ( $dv = 0$ ) :

$$du_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT_v + \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT_v = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp_v$$

$$\delta q_v = c_v dT_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT_v = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT_v = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp_v$$

Luego  $du_v = \delta q_v$

Siendo  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{\beta}{k_T} \rightarrow du_v = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v \frac{\beta}{k_T} dT_v$

Tenemos los resultados:  $\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v}$  y  $\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v = \frac{k_T c_v}{\beta}}$

Considerando un proceso a  $p=cte$  ( $dp=0$ ) y operando con  $h$  se obtienen:

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p} \quad \text{y} \quad \boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_p = \frac{c_p}{v\beta}}$$

$$\delta q = du + p dv = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[ p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \right] dv$$

calor latente de dilatación =  $l_v$

$$\delta q = dh - v dp = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[ \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v \right] dp$$

calor latente de compresión =  $l_p$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta q &= c_v dT + l_v dv \\ \delta q &= c_p dT + l_p dp \end{aligned}}$$

El calor latente se manifiesta cuando hay variación de calor y trabajo tales que no varía la temperatura.

Restando miembro a miembro se tiene:

$$(c_p - c_v) dT = l_v dv - l_p dp \therefore$$

$$dT = \frac{l_v}{c_p - c_v} dv - \frac{l_p}{c_p - c_v} dp = \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} dv + \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} dp$$

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

$$k_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

$$l_v = p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = (c_p - c_v) \frac{1}{\beta v}$$

$$l_p = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v = -(c_p - c_v) \frac{k_T}{\beta}$$

$$\delta q = cdT \quad (c - c_p)dT = l_p dp$$

$$(c - c_v)dT = l_v dv$$

Definición:  $n = \frac{c - c_p}{c - c_v} = \frac{l_p dp}{l_v dv} = -k_T v \frac{dp}{dv}$

Fórmula de Reech:  $\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{k_T v} n$

Como  $k_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \rightarrow \frac{dp}{dv} = n \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$

En principio  $n$  varía en cada punto.

Para gases ideales:  $\frac{dp}{dv} = -n \frac{p}{v} \rightarrow \frac{dp}{p} + n \frac{dv}{v} = 0 \rightarrow \boxed{pv^n = cte}$

Si  $n = cte$  el proceso se llama politrópico.

### Balance energético en un sistema abierto

Energía específica:  $e = u + \frac{v^2}{2} + gz$

$u$  - energía interna específica

$\frac{v^2}{2}$  - energía cinética específica

$gz$  - energía potencial específica

Por el teorema del transporte:  $\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} e \rho dV \right) = \frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} e\rho(\bar{v} \cdot \bar{n}) dA$

$$dE = d \int_{\Omega} e \rho dV \quad dE' = dt \int_{\Omega} \frac{\partial e \rho}{\partial t} dV \quad \rightarrow \quad dE = dE' + dt \int_{\partial\Omega} e \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA$$

$dE = \delta Q + \delta W'$  por el primer principio aplicado al sistema cerrado

$\delta W'$  - todos los tipos de trabajo que se transfieren a través de la frontera

$$\delta W' = \delta W + dt \int_{\partial\Omega} -p(\bar{n} \cdot \bar{v}) dA = \delta W + dt \int_{\partial\Omega_A} -p(\bar{n} \cdot \bar{v}) dA + dt \int_{\partial\Omega_C} -p(\bar{n} \cdot \bar{v}) dA$$

$\delta W$  - todos los tipos de trabajo menos el trabajo de las fuerzas de presión necesario para llevar el sistema a la configuración  $\Omega$ . (ej.: trabajo de un eje giratorio)

$\partial\Omega_A$  - parte de la frontera de  $\Omega$  abierta (hay flujo de masa a través de ella)

$\partial\Omega_C$  - parte de la frontera de  $\Omega$  cerrada (no hay flujo de masa a través de ella)

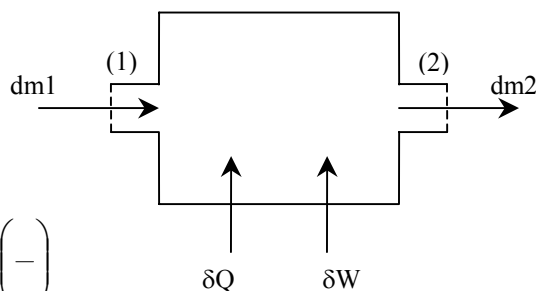
$$\rightarrow \delta Q + \delta W = dE' + dt \int_{\partial\Omega_A} \rho(e + pv)(\bar{v} \cdot \bar{n}) dA + dt \int_{\partial\Omega_C} p(\bar{v} \cdot \bar{n}) dA$$

$$dt \int_{\partial\Omega_C} p(\bar{v} \cdot \bar{n}) dA = \int_{\partial\Omega_C} p dV$$

donde  $dV$  = variación de volumen producida por las fuerzas de presión sobre  $\partial\Omega_C$ .

$$\rightarrow \delta Q + \delta W = dt \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right) dV + dt \int_{\partial\Omega_A} \rho \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) dA + \int_{\partial\Omega_C} p dV$$

Aplicación a un sistema con frontera fija:



$$\delta Q + \delta W = dE' - \underbrace{dt\rho_1 v_1 S_1}_{dm_1} \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right)_1 + \underbrace{dt\rho_2 v_2 S_2}_{dm_2} \left( - \right)_2$$

$$dm_1 + dm_2 = dM \quad \text{masa que se acumula}$$

Convenio:  $dm > 0$  si sale del sistema  
 $dm < 0$  si entra al sistema

Proceso estacionario:  $dM = 0$   
 $\varphi = \varphi(P, t) = \varphi(P)$

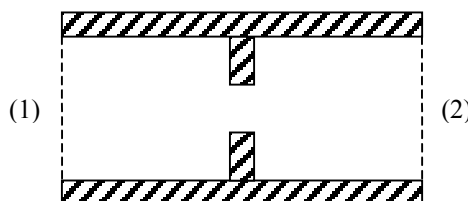
En particular  $e\rho = cte$  en el tiempo  $\therefore dE' = 0$

$$\delta Q + \delta W = \sum_{i=1}^n dm_i \left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right)_i$$

Además  $\sum_{i=1}^n dm_i = 0$

Aplicaciones:

1) Estrangulamiento:



$$p_1 > p_2$$

La velocidad cerca del orificio es aproximadamente igual:  $v_1 \cong v_2$

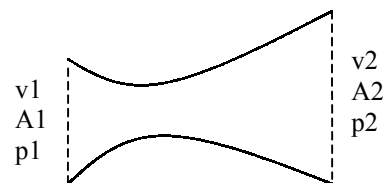
Adiabático,  $\Delta z$  despreciable,  $\delta W = 0 \rightarrow \boxed{h_1 = h_2}$

Como en un gas ideal  $\Delta h = c_p \Delta T$ , resulta que  $\Delta T = 0$ .

En gases reales sin embargo  $\Delta T \neq 0$

2) Toberas:

Transforman la energía de un fluido en energía cinética.



$$\Delta z \cong 0$$

$$\delta W = \delta Q = 0$$

$$0 = \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = h_1 - h_2$$

El incremento de energía cinética es igual a la variación de la entalpía.