SEGUNDO PARCIAL de GEOMETRÍA y ÁLGEBRA LINEAL **2**

martes 1 de diciembre de 2020

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 60 puntos.
- La duración del parcial es de tres horas.
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ es el espacio de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo k.
- $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que n.

(I) Verdadero Falso. Total: 16 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8
F	F	V	F	V	F	F	F

Ejercicio 1:
Existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador autoadjunto no nulo tal que $T^2 = 0$.

Ejercicio 2:
Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal. Si λ y μ son dos valores propios distintos de T; entonces los subespacios propios S_λ y S_μ son ortogonales.

Ejercicio 3:
Toda isometría lineal $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ es invertible.

Ejercicio 4:
Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador unitario y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de T. Entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

Ejercicio 5:
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Dado $Y \in \mathbb{R}^m$, el vector X que minimiza $\|Y - AX\|$ es la solución del sistema $(A^tA)X = A^tY$.

Ejercicio 6:
Todo operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal es diagonalizable.

Ejercicio 7:
Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que su matriz asociada en la base canónica es la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces T es autoadjunto.

Ejercicio 8:
La forma cuadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es definida positiva si y sólo si a y c son positivos.

(II) Ejercicios de respuesta corta. Total: 24 puntos

Para uso docente:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3

Nota: Escriba en los recuadros correspondientes solamente lo que se pide en cada problema; eso será lo único que se tendrá en cuenta para la corrección.

Ejercicio 1: (8 puntos)

Considere $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos habituales. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y) = (x + y, x, 2y).$$

Escribir explícitamente $T^*(x, y, z)$:

$$T^*(x, y, z) = (x + y, x + 2z)$$

Ejercicio 2: (8 puntos)

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos el operador autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- El determinante de T vale -48.
- $T(x, y, z) = 4(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + z = 0\}$.

Entonces, $T(4, 0, -3)$ vale:

$$T(4, 0, -3) = (2, 0, -19)$$

Ejercicio 3: (8 puntos)

Considere el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ con el producto interno $\langle ax^2+bx+c, dx^2+ex+f\rangle = 2ad+be+cf$. Considere además el funcional lineal $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$T(ax^2+bx+c) = -a+b-c.$$

El representante de Riesz del funcional T es:

$$-\frac{1}{2}x^2+x-1$$

(III) Múltiple opción. Total: 20 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2
D	C

Ejercicio 1

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y consideremos S un subespacio no trivial de V. La descomposición $V = S \oplus S^\perp$ implica que todo $v \in V$ se escribe de forma única como $v = s + s'$ con $s \in S$ y $s' \in S^\perp$. Esto nos permite definir el operador $T : V \to V$ tal que $T(v) = s - s'$.
Indique la opción correcta:

A) T no es un operador ni autoadjunto ni unitario.

B) T es un operador autoadjunto pero no unitario.

C) T es un operador unitario pero no autoadjunto.

D) T es un operador autoadjunto y unitario.

Ejercicio 2

Considere la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x,y,z) = 2x^2+4y^2+3z^2+4xz+4yz.$$

Indique la opción correcta:

A) Q es semidefinida negativa.
B) Q es definida positiva.
C) Q es semidefinida positiva.
D) Q es indefinida.