Segundo Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 17 de noviembre de 2018.

Ejercicios de múltiple opción

Ejercicio 1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonal del espacio V. Supongamos que T es un funcional lineal sobre V, se sabe que

$$T(v_i) = < v_i, v_i >^{\frac{1}{2}}$$

para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. Indicar la opción correcta:

1. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{<v_i,v_i>^{\frac{1}{2}}}$
2. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} v_i$
3. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} < v_i, v_i >^{\frac{1}{2}} v_i$
4. No se cumplen las hipótesis del teorema de Riesz

La opción correcta es la 1.

Sea $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, luego, $\{w_1, ..., w_n\}$ es una base ortonormal de V.
Sabemos que el representante de Riesz es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{T(w_i)} w_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{T\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right)} \frac{v_i}{\|v_i\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|v_i\|^2} \overline{T\left(v_i\right)} v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|v_i\|^2} \overline{\|v_i\|} v_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{\|v_i\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{< v_i, v_i >^{\frac{1}{2}}}.$$

Ejercicio 2. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y $B = \{u, v, w\}$ una base de V tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq \beta$. Indicar la opción correcta:

1. T autoadjunta $\Leftrightarrow [u]^\perp = [v, w]$.
2. T autoadjunta $\Leftrightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. T autoadjunta $\Leftrightarrow [u]^\perp = [v, w]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Ninguna de las anteriores.

La opción correcta es la 3.

Es claro que α y β son valores propios de T así como que

$$S_\alpha = [u] \qquad S_\beta = [v, w].$$

($\Rightarrow$) Si T es autoadjunta tenemos que los valores propios son reales y se cumple que S_α y S_β son ortogonales, en particular, $S_\beta \subset (S_\alpha)^\perp$, por las dimensiones se tiene que $(S_\alpha)^\perp = S_\beta$, es decir,

$$[u]^\perp = [v, w].$$

($\Leftarrow$) Si $[u]^\perp = [v, w]$ tenemos que $(S_\alpha)^\perp = S_\beta$ por lo cual $V = [u] \oplus [v, w]$. Por G-S podemos obtener bases ortonormales $\{u'\}$ de S_α y $\{v', w'\}$ de S_β cuya unión es una base ortonormal de V de vectores propios, como los valores propios además son reales se tiene T es autoadjunta.

Ejercicio 3. Sea U en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ una matriz unitaria que posee valores propios reales y verifica que

$$tr(U) = -1 \qquad U(1, -1, 0)^t = (1, -1, 0)^t.$$

Indicar la opción correcta:

1. $U(1, -2, 2)^t = (2, -1, -2)^t$
2. $U(1, -2, 2)^t = (3, 0, 0)^t$
3. $U(1, -2, 2)^t = (-1, 2, -2)^t$
4. $U(1, -2, 2)^t = (2, 1, 2)^t$

La opción correcta es la 1.

Por ser U unitaria tenemos que U es diagonalizable en una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ y que los valores propios tienen módulo 1. Dado que los valores propios son reales se cumple que $\lambda = \pm 1$ para todo valor propio. Si D es la matriz diagonal semejante a U sabemos que $-1 = tr(U) = tr(D) = mg(1)1 + mg(-1)(-1)$, de donde se deduce que $mg(1) = 1$ y $mg(-1) = 2$. Luego, tenemos que $S_1 = [(1, -1, 0)^t]$ y que $S_{-1} = {S_1}^\perp = [(1, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t]$. Tenemos que $(1, -2, 2)^t = \frac{3}{2}(1, -1, 0)^t - \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t + 2(0, 0, 1)^t$, luego $U(1, -2, 2)^t = \frac{3}{2}(1, -1, 0)^t + \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t - 2(0, 0, 1)^t = (2, -1, -2)^t$.

Ejercicio 4. Sea $Q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + 4xy - 6yz$ una forma cuadrática. Indicar la opción correcta:

1. Q semidefinida (positiva ó negativa) si y sólo si $a = 0$.
2. Q indefinida para todo a.
3. Q definida positiva si y sólo si $a \in (0, \sqrt{13})$.

4. Q definida negativa si y sólo si $a \in (-\infty, -\sqrt{13})$.

La opción correcta es la 2.

La matriz asociada a la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo polinomio característico resulta $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2a\lambda + (13 - a^2)\lambda - 9a$. Utilizando la regla de descartes y discutiendo según $a < -\sqrt{13}$, $a = -\sqrt{13}$, $a \in (-\sqrt{13}, 0)$, $a = 0$, $a \in (0, \sqrt{13})$, $a = \sqrt{13}$ y $a > \sqrt{13}$ se puede ver que en todos los casos $p > 0$ y $q > 0$ por lo cual Q resulta indefinidapara todo a.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y considere la descomposición en valores singulares $A = USV^t$.

1. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

4. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

La opción correcta es la 4.
Tenemos que

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, $\sigma_1 = \sqrt{3}$ y $v_1 = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector propio asociado al valor propio 3 de A^tA (que integra una base ortonormal de veps. de A^tA) y $w_1 = \frac{1}{\sigma}Av_1 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ que resulta ser la primer columna de la matriz U.

Ejercicio de desarrollo

Sean V y W $\mathbb{C}$-espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita.

1. Definir $T : V \to W$ isometría lineal y $S : V \to V$ operador unitario. (4 puntos)
2. Probar que si $T : V \to V$ es un operador unitario entonces es una isometría lineal. (6 puntos)
3. Probar que si $T : V \to V$ es una isometría lineal entonces
   a) $|\lambda| = 1$ para todo λ valor propio de T. (4 puntos)
   b) Los subespacios propios asociados a distintos valores propios son ortogonales. (6 puntos)

1. Una isometría lineal es una transformación lineal que preserva la norma, es decir,
   $$\|T(v)\| = \|v\| \text{ para todo } v \text{ en } V.$$
   Un operador unitario es un operador invertible que verifica que $T^{-1} = T^*$
2. Sea $T : V \to V$ un operador unitario y sean u, v vectores cualesquiera en V. Se cumple que
   $$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*(T(v))\rangle = \langle u, T^{-1}(T(v))\rangle = \langle u, v\rangle.$$
   Luego, T preserva el producto interno, en particular preserva la norma, y T resulta una isometría lineal.
3. Probar que si $T : V \to V$ es una isometría lineal entonces
   a) Sea λ valor propio de T y v vector propio asociado, se cumple que
   $$\langle T(v), T(v)\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle.$$
   Por ser isometría se cumple que
   $$\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle.$$
   Luego, $\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle$ de donde se deduce que $|\lambda| = 1$ para todo λ valor propio de T.
   b) Sean $\lambda \neq \mu$ valores propios distintos de T, sean v y w vectores propios asociados. Se cumple que
   $$\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\bar{\mu}\langle v, w\rangle = \lambda\bar{\mu}\langle v, w\rangle$$
   Luego
   $$(1 - \lambda\bar{\mu})\langle v, w\rangle = 0$$
   Por otro lado tenemos que $1 - \lambda\bar{\mu} = \mu\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} = (\mu - \lambda)\bar{\mu} \neq 0$ por lo cual obtenemos que $\langle v, w\rangle = 0$.