Segundo Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 17 de noviembre de 2018.

No. Parcial

____
Nombre y apellido

____
Cédula de Identidad

Ejercicios de múltiple opción

Respuesta correcta 8 puntos, incorrecta -1 punto, sin responder 0 punto. En todos los ejercicios hay una única alternativa correcta. Sólo se tendrá en cuenta lo escrito en la siguiente tabla.

Respuestas				
1	2	3	4	5

$\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos, $\mathbb{R}$ los números reales, $|\cdot|$ módulo de un complejo.

Ejercicio 1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonal del espacio V. Supongamos que T es un funcional lineal sobre V, se sabe que

$$T(v_i) =< v_i, v_i >^{\frac{1}{2}}$$

para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. Indicar la opción correcta:

1. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{<v_i,v_i>^{\frac{1}{2}}}$
2. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} v_i$
3. El vector representante de Riesz de T es $\sum_{i=1}^{n} < v_i, v_i >^{\frac{1}{2}} v_i$
4. No se cumplen las hipótesis del teorema de Riesz

Ejercicio 2. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y $B = \{u, v, w\}$ una base de V tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq \beta$. Indicar la opción correcta:

1. T autoadjunta $\Leftrightarrow [u]^\perp = [v, w]$.
2. T autoadjunta $\Leftrightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. T autoadjunta $\Leftrightarrow [u]^\perp = [v, w]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 3. Sea U en $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ una matriz unitaria que posee valores propios reales y verifica que

$$tr(U) = -1 \qquad U(1, -1, 0)^t = (1, -1, 0)^t.$$

Indicar la opción correcta:

1. $U(1,-2,2)^t = (2,-1,-2)^t$
2. $U(1,-2,2)^t = (3,0,0)^t$
3. $U(1,-2,2)^t = (-1,2,-2)^t$
4. $U(1,-2,2)^t = (2,1,2)^t$

Ejercicio 4. Sea $Q(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + 4xy - 6yz$ una forma cuadrática. Indicar la opción correcta:

1. Q semidefinida (positiva ó negativa) si y sólo si $a = 0$.
2. Q indefinida para todo a.
3. Q definida positiva si y sólo si $a \in (0, \sqrt{13})$.
4. Q definida negativa si y sólo si $a \in (-\infty, -\sqrt{13})$.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y considere la descomposición en valores singulares $A = USV^t$.

1. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
3. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$
4. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Ejercicio de desarrollo

Sean V y W $\mathbb{C}$-espacios vectoriales con producto interno de dimensión finita.

1. Definir $T : V \to W$ isometría lineal y $S : V \to V$ operador unitario. (4 puntos)
2. Probar que si $T : V \to V$ es un operador unitario entonces es una isometría lineal. (6 puntos)
3. Probar que si $T : V \to V$ es una isometría lineal entonces
   a) $|\lambda| = 1$ para todo λ valor propio de T. (4 puntos)
   b) Los subespacios propios asociados a distintos valores propios son ortogonales. (6 puntos)

Para uso exclusivo docente			
1.	2.	3.a)	3.b)