Segundo Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Soluciones

Ejercicios de múltiple opción

Ejercicio 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y consideremos su descomposición en valores singulares $A = USV^t$. Indicar la opción correcta:

A. No existe una tal descomposición pues A no es cuadrada.

B. Los valores singulares de A son $\sigma_1 = 6$ y $\sigma_2 = \sqrt{2}$ y la primer columna de U es $w = (-1, 0)$.

C. La primer columna de V^t es $v = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y la primer columna de U es $w = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

D. La primer columna de V^t es $v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y la primer columna de U es $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución

La respuesta correcta es la C.

Los valores propios de la matriz

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$, luego los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$ y $\sigma_3 = 0$.
Ahora bien, para hallar una base ortonormal $\mathcal{A}$ formada por vectores propios de $R = A^t A$ debemos calcular los núcleos de $R - 3I$, $R - I$ y R.

$$S_3 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right], \quad S_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad S_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Normalizando, obtenemos

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Así $V^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ cuya primer columna resulta $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

A su vez,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad u_2 = A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

De donde $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Los resultados de un experimento se recogen en los siguientes pares ordenados: $(-1,0),(0,2),(1,0),(2,\frac{2}{3})$, encuentre la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales que mejor ajuste los datos obtenidos.

A. $f(x) = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + 2$

B. $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$

C. $f(x) = -x^2 + x + 5$

D. $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - 4$

Solución

La respuesta correcta es la B.
La ecuación matrical a resolver es $A^tAX = A^tY$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^tY = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La solución es $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 1$.

Ejercicio 3. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y B base de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ T.L. tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Indique la opción correcta:

A. Si $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ entonces T autoadjunta.

B. T autoadjunta si y sólo si B ortogonal.

C. T autoadjunta si y sólo si B ortonormal.

D. T autoadjunta si y sólo si B es la base canónica.

Solución

La respuesta correcta es la B.

A. FALSA.
Si $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ entonces

$$S_{-1} = [(1,0,0)], \quad S_1 = [(1,1,0)], \quad S_2 = [(1,1,1)]$$

Luego, los subespacios propios no resultarían ortogonales lo que contradice que T sea autoadjunta.

B. VERDADERA.
Si B es ortogonal entonces T es autoadjunta ya que resulta diagonalizable en una base ortonormal B: la normalizada de B que denotaremos B'. Es claro que B' cumple que $_{B'}(T)_{B'} =_B (T)_B$ diagonal. Si T es autoadjunta los subespacios propios serán ortogonales y dado que la base B está compuesta por vectores propios asociados a distintos valores propios se cumple que deben ser ortogonales unos a otros, por lo que B resulta ortogonal.

C. FALSA.
Si B es ortonormal entonces T es autoadjunta ya que resulta diagonalizable en una base ortonormal (y sus valores propios son reales). Sin embargo, si T es autoadjunta B no tiene porqué ser necesariamente ortonormal (considerar $B = \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y ver que resulta autoadjunta).

D. FALSA.
Si B la base canónica entonces T es autoadjunta ya que resulta diagonalizable en una base ortonormal (y sus valores propios son reales). Sin embargo, si T es autoadjunta B no tiene porqué ser necesariamente la base canónica (considerar $B = \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y ver que resulta autoadjunta).

Ejercicio 4. Sean Q_A y Q_B formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ asociadas a matrices A y B respectivamente. Se sabe que $det(A) < 0$ y que $det(B) = 0$. Indique la opción correcta:

A. Q_A definida negativa y Q_B indefinida.

B. Q_A definida negativa y Q_B semidefinida (positiva o negativa).

C. Existen vectores no nulos v, w en $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_A(v) < 0$ y $Q_B(w) = 0$.

D. Existen vectores no nulos v, w en $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_A(v) = 0$ y $Q_B(w) = 0$.

Solución

La respuesta correcta es la C.

Como $det(A) < 0$ sabemos que los valores propios de A cumplen que su producto es negativo, de donde obtenemos que debe existir algún valor propio negativo. Como $det(B) = 0$ sabemos que los valores propios de B cumplen que su producto nulo, de donde obtenemos que debe existir algún valor propio nulo.

Si consideramos v vector propio de A asociado al valor propio negativo λ y w vector propio de B asociado al valor propio nulo μ obtenemos que

$$Q_A(v) = \lambda ||v||^2 < 0 \quad Q_B(w) = \mu ||w||^2 = 0$$

Por el Teorema de clasificación podrían descartarse los demás casos.

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y sea $T : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta.

1. Demostrar que $\lambda \in \mathbb{R}$ para todo λ valor propio de T.

2. Demostrar que subespacios propios distintos son ortogonales, es decir,

$$\langle v, w \rangle = 0$$

para todo v en S_λ y w en S_μ con $\lambda \neq \mu$.

Solución

Ver Teórico.

Ejercicio 2 (8 puntos)
Sea A en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétrica tal que

$$A(1,0,0)^t = (2,0,0)^t, \quad (0,1,1)^t \in S_{-1}(A), \quad det(A) = 0.$$

Hallar $Ker(A)$ indicando qué resultados teóricos fueron usados.

Solución

De la primera relación se deduce que 2 es valor propio de A con vector propio $(1,0,0)^t$, del segundo enunciado se deduce que -1 es valor propio de A con vector propio $(0,1,1)^t$ y del tercer enunciado que 0 es valor propio de A.

$KerA = S_0$ y por el Teorema espectral para matrices simétricas tenemos que

$$S_0 = (S_{-1} \oplus S_2)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b + c = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Ejercicio 3 (10 puntos)
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una isometría.

1. Demostrar que T es invertible y que $T^{-1} = T^*$.
2. ¿Es T diagonalizable? Demostrar o dar un contraejemplo.

Solución

Ver Teórico.