Segundo Parcial de Geometría y Álgebra Lineal 2

Jueves 5 de julio de 2018.

No. Parcial

Nombre y apellido

Cédula de Identidad

Ejercicios de múltiple opción

Respuesta correcta 8 puntos, incorrecta -1, sin responder 0. En todos los ejercicios hay una única alternativa correcta. Sólo se tendrá en cuenta lo escrito en la siguiente tabla.

Respuestas.			
1	2	3	4

Ejercicio 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y consideremos su descomposición en valores singulares $A = USV^t$. Indicar la opción correcta:

A. No existe una tal descomposición pues A no es cuadrada.

B. Los valores singulares de A son $\sigma_1 = 6$ y $\sigma_2 = \sqrt{2}$ y la primer columna de U es $w = (-1, 0)$.

C. La primer columna de V^t es $v = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y la primer columna de U es $w = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

D. La primer columna de V^t es $v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y la primer columna de U es $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ejercicio 2. Los resultados de un experimento se recogen en los siguientes pares ordenados: $(-1, 0), (0, 2), (1, 0), (2, \frac{2}{3})$, encuentre la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales que mejor ajuste los datos obtenidos.

A. $f(x) = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + 2$

B. $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$

C. $f(x) = -x^2 + x + 5$

D. $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - 4$

Ejercicio 3. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y B base de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ T.L. tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Indique la opción correcta:

A. Si $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ entonces T autoadjunta.

B. T autoadjunta si y sólo si B ortogonal.

C. T autoadjunta si y sólo si B ortonormal.

D. T autoadjunta si y sólo si B es la base canónica.

Ejercicio 4. Sean Q_A y Q_B formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ asociadas a matrices A y B respectivamente. Se sabe que $det(A) < 0$ y que $det(B) = 0$. Indique la opción correcta:

A. Q_A definida negativa y Q_B indefinida.

B. Q_A definida negativa y Q_B semidefinida (positiva o negativa).

C. Existen vectores no nulos v, w en $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_A(v) < 0$ y $Q_B(w) = 0$.

D. Existen vectores no nulos v, w en $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_A(v) = 0$ y $Q_B(w) = 0$.

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1 (10 puntos)
Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y sea $T : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta.

1. Demostrar que $\lambda \in \mathbb{R}$ para todo λ valor propio de T.
2. Demostrar que subespacios propios distintos son ortogonales, es decir,

$$\langle v, w \rangle = 0$$

para todo v en S_λ y w en S_μ con $\lambda \neq \mu$.

Ejercicio 2 (8 puntos)
Sea A en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétrica tal que

$$A(1,0,0)^t = (2,0,0)^t, \quad (0,1,1)^t \in S_{-1}(A), \quad det(A) = 0.$$

Hallar $Ker(A)$ indicando qué resultados teóricos fueron usados.

Ejercicio 3 (10 puntos)
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una isometría.

1. Demostrar que T es invertible y que $T^{-1} = T^*$.
2. ¿Es T diagonalizable? Demostrar o dar un contraejemplo.