Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Geometría y Álgebra Lineal II

Segundo parcial - de 2017. Duración: 3:30

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

Verdadero-Falso

Determinar en cada caso si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas

1. Sea $T : V \to V$, $\Bbbk = \mathbb{C}$, tal que $T^* = T^{2017}$. Entonces T es diagonalizable. $\square$
2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simetría respecto a la recta $y = x$. Entonces T es ortogonal y autoadjunta. $\square$
3. Sea $T : V \to V$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal y $\|T(v_i)\| = \|v_i\|$, $\forall\ i = 1, \dots, n$. Entonces $\|T(v)\| = \|v\|\ \ \forall\ v \in V$. $\square$
4. Sea $T : V \to V$, $\Bbbk = \mathbb{C}$, T unitaria, $\mathcal{B}$ base ortonormal de V, entonces $|\det({}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}})| = 1$. $\square$
5. Si $T : V \to V$, $\Bbbk = \mathbb{C}$, T unitario y autoadjunto, entonces $T = Id$. $\square$

Poner V o F en $\square$. Si contesta bien 2 puntos, si contesta mal -1 puntos y si no contesta 0 puntos.

Ejercicos M-O

1. Sea $T : V \to V$, $\Bbbk = \mathbb{C}$, tal que $\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle$, $\ \forall v \in V$. Entonces:
   Indicar la opción correcta.
   a) $T = T^*$. $\square$
   b) T^* es unitaria. $\square$
   c) T es invertible. $\square$
   d) Ninguna de las opciones anteriores. $\square$
2. Sea la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x, y, z) = ax^2 - ay^2 - az^2 + 2xy + 4xz$.
   Indicar la opción correcta:
   a) $\forall a \geq \sqrt{5}$, es definida negativa. $\square$
   b) Existe un único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que Q es semidefinida positiva. $\square$
   c) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que Q es indefinida. $\square$
   d) Existe un único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que Q es semidefinida negativa. $\square$

Marcar con una cruz la opción correcta en $\square$. Si contesta bien 10 puntos, si contesta mal -2 puntos y si no contesta 0 puntos.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio 1 (15 puntos)

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno, $S \subset V$ un subespacio. Definir Proyección Ortogonal P_S.(3 puntos)
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$.
   a) Hallar P_S.(3 puntos)
   b) Hallar $P_S{}^*$.(3 puntos)
   c) ¿Es P_S ortogonal? Justificar.(3 puntos)
   d) Sea $T = P_{S^\perp} \circ P_S$. Hallar T^*.(3 puntos)

Ejercicio 2(15 puntos)
Sea $T : V \to V$ unitaria ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$).

1. Probar que si $S \subset V$ es un subespacio que cumple que $T(S) \subset S$ entonces $T(S^\perp) \subset S^\perp$.(6 puntos)
2. Probar que existe una base ortonormal de V formada por vectores propios.(9 puntos)