Geometría y Álgebra lineal 2

Examen febrero 2023

4 de febrero de 2023.

Ejercicios: Múltiple opción

1. Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica:

$$T(1,1,1) = (1, \sqrt{2}, 0), \quad T(1,1,0) = (0, \sqrt{2}, 0) \quad y \quad T(1,0,0) = (a,b,c), \;\; a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Para todo $c \in \mathbb{R}$, T no es ortogonal.

B. Existe un único $c \in \mathbb{R}$ para el cual T es ortogonal.

C. Existen exactamente dos valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales T es ortogonal.

D. Existen infinitos valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales T es ortogonal.

Solución: El operador T es ortogonal sii es una isometría sobreyectiva. Si es isometría es inyectiva y por el teorema de la dimensión es sobreyectiva. Se debe cumplir $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$. La condición anterior se satisface para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$ si y solamente si se satisface $\forall u, v \in B$ siendo B una base de $\mathbb{R}^3$. Tomando $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, T es ortogonal si y solamente si

$$\begin{array}{ll}
\langle T(1,1,1), T(1,1,1)\rangle = 3 & \text{que se verifica} \\
\langle T(1,1,1), T(1,1,0)\rangle = 2 & \text{que se verifica} \\
\langle T(1,1,1), T(1,0,0)\rangle = 1 & \text{que se verifica si } \boxed{a + \sqrt{2}b = 1} \\
\langle T(1,1,0), T(1,1,0)\rangle = 2 & \text{que se verifica} \\
\langle T(1,1,0), T(1,0,0)\rangle = 1 & \text{que se verifica si } \boxed{b = \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
\langle T(1,0,0), T(1,0,0)\rangle = 1 & \text{que se verifica si } \boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}
\end{array}$$

Concluimos que T es ortogonal si y solamente si

$$a = 0 \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Respuesta correcta: $\boxed{\text{C}}$

2. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(A) = kA + (1-k)A^t, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual T no es diagonalizable.

B. Existe un único valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual T es diagonalizable.

C. Para todo $k \in \mathbb{R}$, 0 no es valor propio.

D. T es diagonalizable para todo $k \in \mathbb{R}$.

Solución: Consideramos la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

La matriz asociada a T en la base B es

$$_B[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)^3(2k-1-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2k-1$.

- Si $k = 1$ entonces $T = Id$ y es diagonalizable.
- Si $k \neq 1$ entonces T tiene dos valores propios: $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 3 y $\lambda = 2k-1$ con multiplicidad algebraica 1. Vemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es 3 viendo que el rango de la siguiente matriz es 1:

$$_B[T]_B - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Concluimos que T es diagonalizable.

Respuesta correcta: $\boxed{\text{D}}$

3. Se considera $\mathbb{R}^3$ dotado de un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ tal que $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es base ortonormal. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.
Indicar la opción correcta:

A. $P_S(1,2,2) = (0, 3/2, 3/2)$.

B. $P_S(1,2,2) = (2/3, 7/3, 5/3)$

C. $P_S(1,2,2) = (1,1,0)$

D. $P_S(1,2,2) = (0,0,0)$

Solución: Una base ortonormal de S es $\{(1,1,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Entonces

$$P_S(1,2,2) = \langle (1,2,2),(1,1,0)\rangle(1,1,0) + \langle (1,2,2),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\rangle(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Escribiendo $(1,2,2) = -(1,0,0) + 2(1,1,1)$ podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle (1,2,2),(1,1,0)\rangle = \langle -(1,0,0)+2(1,1,1),(1,1,0)\rangle &= 0 \\ \langle (1,2,2),(0,1,1)\rangle = \langle -(1,0,0)+2(1,1,1),(1,1,1)-(1,0,0)\rangle &= 3 \end{aligned}$$

Entonces $P_S(1,2,2) = (0,3/2,3/2)$. Respuesta correcta: $\boxed{\text{A}}$

4. Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta. Se sabe que

$$\dim(Im(T)) = 1 \quad \text{y} \quad T(-1,0,1) = (2,0,-2).$$

Indicar la opción correcta:

A) $T(2,3,0) = (0,0,0)$

B) $T(2,3,0) = (-2,0,2)$

C) $T(2,3,0) = (3,0,-3)$

D) $T(2,3,0) = (-1,0,1)$

Solución: Dado que $\dim(Im(T)) = 1$ por el Teorema de las dimensiones tenemos que $\dim(ker(T)) = 2$. Luego, 0 es valor propio y $mg(0) = 2$.
Por otro lado sabemos que -2 es valor propio y que $(-1,0,1)$ es un vector propio asociado, por ser T autoadjunta se cumple que $S_0 \subset [(-1,0,1)]^\perp$ y dado que $\dim(S_0) = 2$ tenemos que $S_0 = [(-1,0,1)]^\perp = \{(x,y,z) : -x+z = 0\} = [(1,0,1),(0,1,0)]$ y $S_{-2} = [(-1,0,1)]$.
Finalmente $(2,3,0) = -(-1,0,1) + (1,0,1) + 3(0,1,0)$ por lo cual

$$T(2,3,0) = T(-(-1,0,1)) = -(-2)(-1,0,1) = (-2,0,2).$$

Respuesta correcta: $\boxed{\text{B}}$

Ejercicio de desarrollo

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y $T : V \to V$ un operador unitario.

1. Probar que si $S \subset V$ es un subespacio con $T(S) \subset S$ entonces $T(S^\perp) \subset S^\perp$. (8 puntos)

2. Probar que existe una base ortonormal B de V formada por vectores propios (acá se pide la demostración del Teorema Espectral para operadores unitarios). (20 puntos)

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Hallar la matriz de Jordan. (10 puntos)

2. Hallar una base de Jordan. (14 puntos)

1. Solución:

1. Ver teórico (demostración del Lema 10.6 en las notas “Transformaciones lineales en espacios vectoriales con producto interno”).

2. Ver teórico (demostración del Teorema 10.7 en las notas “Transformaciones lineales en espacios vectoriales con producto interno”).

2. Solución:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 & 1 \\ -1 & -1-x & 4 \\ -1 & -2 & 4-x \end{pmatrix} = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3.$$

Por lo tento existe un único valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica $ma(1) = 3$. Para poder establecer la forma de Jordan debemos estudiar la multiplicidad geométrica

$$mg(1) = 3 - rg(A - I_3) = 3 - rg \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Tenemos entonces que J está compuesto por un único bloque de Jordan de valor propio 1 y tamaño 3×3, que a su vez está compuesto por un único sub-bloque, luego,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Para hallar una base de Jordan debemos hallar vectores $\{u, v, w\}$ que satisfagan

$$Au = u + v, \quad Av = v + w \quad \text{y} \quad Aw = w,$$

Comencemos por hallar w, que es vector propio de A.

$$S_1(A) = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Consideraremos $w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hallemos v: sabemos que $Av = v + w \Leftrightarrow (A - I_3)v = w$ por lo cual el vector v es el vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solución del sistema cuya matriz ampliada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Escalerizando la matriz ampliada obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y = 3, z = 1 \right\},$$

en particular, el vector $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se encuentra en la solución de dicho sistema y verifica lo solicitado.

Por último, hallemos u: sabemos que $Au = u+v \Leftrightarrow (A-I_3)u = v$ por lo cual el vector u es el vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solución del sistema cuya matriz ampliada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Escalerizando la matriz ampliada obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x - 2y = 4, z = -1 \right\},$$

en particular, el vector $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se encuentra en la solución de dicho sistema y verifica lo solicitado.

Obtuvimos la siguiente base de Jordan de la matriz A

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$