# Geometría y Álgebra lineal 2

Examen febrero 2023

4 de febrero de 2023.

| N° Examen | Apellido, Nombre | Firma | Cédula |
|---|---|---|---|
| | | | |

| MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 48 puntos) | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| | | | |

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
**Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.**

La duración del examen es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
**Para aprobar se necesita un mínimo de 60 puntos.**

| SÓLO PARA USO DOCENTE | | |
|---|---|---|
| **MO** | **Des.** | **Total** |
| | | |

## Ejercicios: Múltiple opción (Total: 48 puntos)

Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

**1.** Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica:

$$T(1,1,1) = (1, \sqrt{2}, 0, ), \quad T(1,1,0) = (0, \sqrt{2}, 0, ) \quad y \quad T(1,0,0) = (a,b,c), \ \ a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Para todo $c \in \mathbb{R}$, $T$ no es ortogonal.

B. Existe un único $c \in \mathbb{R}$ para el cual $T$ es ortogonal.

C. Existen exactamente dos valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales $T$ es ortogonal.

D. Existen infinitos valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales $T$ es ortogonal.

**2.** Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(A) = kA + (1-k)A^t, \ \ k \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual $T$ no es diagonalizable.

B. Existe un único valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual $T$ es diagonalizable.

C. Para todo $k \in \mathbb{R}$, 0 no es valor propio.

D. $T$ es diagonalizable para todo $k \in \mathbb{R}$.

**3.** Se considera $\mathbb{R}^3$ dotado de un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ tal que $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es base ortonormal. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.
Indicar la opción correcta:

A. $P_S(1,2,2) = (0,3/2,3/2)$.

B. $P_S(1,2,2) = (2/3,7/3,5/3)$

C. $P_S(1,2,2) = (1,1,0)$

D. $P_S(1,2,2) = (0,0,0)$

**4.** Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta. Se sabe que

$$\dim(Im(T)) = 1 \quad \text{y} \quad T(-1,0,1) = (2,0,-2).$$

Indicar la opción correcta:

A) $T(2,3,0) = (0,0,0)$

B) $T(2,3,0) = (-2,0,2)$

C) $T(2,3,0) = (3,0,-3)$

D) $T(2,3,0) = (-1,0,1)$

## Ejercicio de desarrollo (Total: 52 puntos)

**1.** Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y $T : V \to V$ un operador unitario.

1. Probar que si $S \subset V$ es un subespacio con $T(S) \subset S$ entonces $T(S^{\perp}) \subset S^{\perp}$. (8 puntos)
2. Probar que existe una base ortonormal $B$ de $V$ formada por vectores propios (acá se pide la demostración del Teorema Espectral para operadores unitarios). (20 puntos)

**2.** Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Hallar la matriz de Jordan. (10 puntos)
2. Hallar una base de Jordan. (14 puntos)