Geometría y Álgebra lineal 2.
Solución examen diciembre 2022.

9 de diciembre de 2022.

Ejercicios de múltiple opción.

Ejercicio 1.

Sea $\langle \ , \ \rangle$ un producto interno en $V = \mathbb{R}^2$ con las siguientes propiedades:

$$\langle (1,1),(1,2)\rangle = 0, \quad ||(1,1)|| = 1 \text{ y } ||(1,2)|| = 2.$$

Indicar la opción correcta:

A. $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base ortonormal con este producto interno.

B. $\{(5,6),(0,1)\}$ es una base ortogonal pero no ortonormal con este producto interno.

C. $\langle(-1,-1),(-1,-2)\rangle \neq 0$.

D. Con este producto interno, no existe una base ortonormal.

La opción A es falsa ya que: $(0,1) = (1,2)-(1,1)$, por lo tanto $||(0,1)||^2 = \langle(0,1),(0,1)\rangle = \langle(1,2)-(1,1),(1,2)-(1,1)\rangle = ||(1,2)||^2 + ||(1,1)||^2 = 5$.

La opción B es verdadera ya que: $(5,6) = 4(1,1) + (1,2)$ y $(0,1) = -(1,1) + (1,2)$. Por lo tanto $\langle(5,6),(0,1)\rangle = \langle 4(1,1) + (1,2), -(1,1) + (1,2)\rangle = \langle 4(1,1), -(1,1))\rangle + \langle(1,2),(1,2)\rangle = -4 + 4 = 0$. y $||(0,1)||^2 \neq 1$
La opción C es falsa ya que: $\langle(-1,-1),(-1,-2)\rangle = \langle-(1,1),-(1,2)\rangle = \langle(1,1),(1,2)\rangle = 0$.
La opción D es falsa ya que: por el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal.

Ejercicio 2.
Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 3-a & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Existe un único $a \in \mathbb{R}$ para el cual la matriz A es diagonalizable.

B. La matriz A tiene un único valor propio real para todo $a \in \mathbb{R}$.

C. La matriz A es invertible para todo $a \in \mathbb{R}$.

D. Una posible matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios.

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 3-a & a-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = 3$.
Si $a = 3$, hay un único valor propio triple que es $\lambda = 3$. Por lo tanto, el sistema

$$(A - 3Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ queda } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución es de la forma $\{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z = 0\}$. Lo que implica que hay dos sub-bloques de Jordan.

Si $a \neq 3$, hay dos valores propios que son $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = 3$ (doble). Por lo tanto, el sistema

$$(A - 3Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ queda } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 3-a & a-3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución es de la forma $\{(x, x, 0) \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$. Lo que implica que hay un sub-bloque de Jordan para el valor propio $\lambda = 3$. Por lo tanto, la opción correcta es D.

Ejercicio 3.
Se considera $\mathbb{R}^2$ dotado de un producto interno $\langle \ , \ \rangle$. Se sabe que

$P_S(-1, 3) = (2, 1)$ donde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - 2y = 0\}$, $\quad \|(2, 1)\|^2 = 2$, $\quad \|(-3, 2)\|^2 = 1$.

Indicar la opción correcta:

A. $\|(-1, 3)\|^2 = 1$. B. $\|(-1, 3)\|^2 = 3$. C. $\|(-1, 3)\|^2 = 10$. D. $\|(-1, 3)\|^2 = 12$.

Recordar que para todo v se cumple que $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$. Para $v = (-1, 3)$ se obtiene

$(-1, 3) = P_S(-1, 3) + P_{S^\perp}(-1, 3) = (2, 1) + P_{S^\perp}(-1, 3)$, despejando se obtiene $P_{S^\perp}(-1, 3) = (-3, 2)$. Como $(2, 1) \in S$ y $(-3, 2) \in S^\perp$, por Pitagoras, se tiene que

$$||(-1, 3)||^2 = ||(2, 1) + (-3, 2)||^2 = ||(2, 1)||^2 + ||(-3, 2)||^2 = 2 + 1 = 3.$$

Ejercicio 4.
Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su matriz asociada es:

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

A. T es diagonalizable.

B. T es ortogonal.

C. T tiene exactamente dos valores propios distintos.

D. $T^* = -T$.

Vamos a hallar la matriz asociada a T en la base canónica $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Como tenemos $_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$, deducimos que

- $T(1,1,1) = \sqrt{2}(1,1,1) + -\sqrt{2}(1,1,0) + 1(1,0,0) = (1,0,\sqrt{2})$.
- $T(1,1,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,1) + 0(1,1,0) + \frac{2-\sqrt{2}}{2}(1,0,0) = (1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- $T(1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0) = (1,0,0)$.

Como $(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0)$, entonces

$$T(0,1,0) = T(1,1,0) - T(1,0,0) = (1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) - (1,0,0) = (0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Como $(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0)$, entonces

$$T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (1,0,\sqrt{2}) - (1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = (0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Entonces

$$_{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Como las columnas de $_{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, se tiene que T es ortogonal. Por lo tanto, la opción correcta es la B. Descartamos las restantes opciones: Notar que el polinomio característico de $_{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}$ es $\chi(\lambda) = (1-\lambda)[(a-\lambda)^2 + a^2]$, donde $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Observar que el segundo factor no tiene raices reales, por tanto descartamos la opción A. y C. Para descartar la opción D. notamos que la matriz asociada en la base ortonormal no es antisimétrica.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1.
Ver notas Transformaciones Lineales en Espacios Vectoriales con Producto Interno.

Ejercicio 2. Parte 1. El teorema de Gershgorin nos dice que si los crculos son disjuntos, hay un único (contado con su ma) valor propio de $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ en cada círculo, es decir, una raíz del polinomio característico χ_A. Como la matriz posee entradas reales, sabemos que los centros de cada círculo son reales, además, $\chi_A(\lambda)$ tiene coeficientes reales, esto implica que si α es raíz de $\chi_A(\lambda)$ entonces $\bar{\alpha}$ también lo es. Por tanto $\alpha \in \mathbb{R}$.

Parte 2. Si consideramos A^t, los los círculos de Gerschgorin son disjuntos dos a dos. Aplicando la parte 1 y recordando que los valores propios de A y A^t son los mismos, se llega a que A es diagonalizable.