Geometría y Álgebra lineal 2

Examen Diciembre 2022

9 de Diciembre de 2022.

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 48 puntos)			
1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
Para aprobar se necesita un mínimo de 60 puntos.

SÓLO PARA USO DOCENTE		
MO	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 48 puntos)

Correctas: 12 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Sea $\langle \, , \, \rangle$ un producto interno en $V = \mathbb{R}^2$ con las siguientes propiedades:

$$\langle (1,1),(1,2) \rangle = 0, \quad ||(1,1)|| = 1 \text{ y } ||(1,2)|| = 2.$$

Indicar la opción correcta:

A. $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base ortonormal con este producto interno.

B. $\{(5,6),(0,1)\}$ es una base ortogonal pero no ortonormal con este producto interno.

C. $\langle (-1,-1),(-1,-2) \rangle \neq 0$.

D. Con este producto interno, no existe una base ortonormal.

2. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 3-a & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

A. Existe un único $a \in \mathbb{R}$ para el cual la matriz A es diagonalizable.

B. La matriz A tiene un único valor propio real para todo $a \in \mathbb{R}$.

C. La matriz A es invertible para todo $a \in \mathbb{R}$.

D. Una posible matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

3. Se considera $\mathbb{R}^2$ dotado de un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Se sabe que

$P_S(-1,3) = (2,1)$ donde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - 2y = 0\}$, $\quad \|(2,1)\|^2 = 2, \quad \|(-3,2)\|^2 = 1.$

Indicar la opción correcta:

A. $\|(-1,3)\|^2 = 1.$ B. $\|(-1,3)\|^2 = 3.$ C. $\|(-1,3)\|^2 = 10.$ D. $\|(-1,3)\|^2 = 12.$

4. Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su matriz asociada es:

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

A. T es diagonalizable.

B. T es ortogonal.

C. T tiene exactamente dos valores propios distintos.

D. $T^* = -T$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 52 puntos)

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno, $\langle\ ,\ \rangle$, sobre el cuerpo $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T : V \to V$ con $T^* = T$ (T autoadjunta).

1. Probar que si λ es valor propio de T, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$. (7 puntos)
2. Probar que si $S \subset V$ es un subespacio con $T(S) \subset S$ entonces $T(S^\perp) \subset S^\perp$. (10 puntos)
3. Probar que existe una base ortonormal B de V formada por vectores propios (acá se pide la demostración del Teorema Espectral). (15 puntos)

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ los círculos de Gerschgorin de A que verifican que

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset.$$

   Probar, utilizando el Teorema de Gerschgorin para matrices en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, que la matriz A es diagonalizable. (12 puntos)

2. Probar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable. (8 puntos)