Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL

EXAMEN - SÁBADO 08 DE FEBRERO DE 2020

Nro de Examen	Cédula	Nombre y apellido

- El puntaje mínimo para aprobar es 60 puntos.
- La duración del examen es tres horas.
- Todos los espacios vectoriales considerados en este examen tienen dimensión finita.

(I) Ejercicios de respuesta corta. Total: 36 puntos

Nota: Escriba en los recuadros correspondientes solamente lo que se pide en cada problema; eso será lo único que se tendrá en cuenta para la corrección.

Ejercicio 1: (12 puntos)

Sea

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

una matriz con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Halle todos los valores de α y β que cumplen que M es diagonalizable.

α **(6 puntos)**	β **(6 puntos)**
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\beta = 0$

Solución: Al ser M una matriz triangular inferior, podemos ver que su polinomio característico es $\chi_M(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$. Tenemos entonces que los valores propios de M son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$, donde m.a.$(3) = 2$ y m.a.$(4) = 1$. Para que M sea diagonalizable, debe ocurrir que m.a.$(3) = 2 =$ m.g.(3). Veamos entonces cuáles son las condiciones sobre α y β para que esto último ocurra. Para ello, calculemos el subespacio propio $S_3 = \mathrm{Ker}(M - 3I_3)$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$, es decir, hallemos el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $(M - 3I_3) \cdot X = 0$, donde

$$M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que debe ocurrir $\dim(\mathrm{Ker}(M - 3I_3)) =$ m.g.$(3) = 2$, y por el Teorema de las Dimensions, tenemos que $\dim(\mathrm{Ker}(M - 3I_3)) + \dim(\mathrm{Im}(M - 3I_3)) = 3$, de donde $\dim(\mathrm{Im}(M - 3I_3)) = 1$. Luego, el número de filas diferentes de cero de la matriz $M - 3I_3$ debe ser igual a 1. La tercera fila no puede ser cero porque una de sus entradas es la constante = 1. Entonces, la segunda fila tiene que ser cero, y para que esto ocurra debe ocurrir que $\beta = 0$. Note además que α puede tomar cualquier valor.

Ejercicio 2: (12 puntos)

Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de las matrices de orden 2×2 con coeficientes complejos, equipado con el producto interno $\langle -,-\rangle\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ dado por $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$, donde $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ y $B^*=\overline{B^t}$. Considere la base

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

La base ortonormal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que se obtiene a partir de $\mathcal{B}$ mediante el procedimiento de Gram-Schmidt es:

(3 puntos)	**(3 puntos)**	**(3 puntos)**	**(3 puntos)**
$\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ i\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$

Solución: Aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal $\mathcal{B}_{\mathrm{o}}=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ a partir de $\mathcal{B}=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$:

$U_1=V_1,$

$$U_2=V_2-\frac{\langle V_2,U_1\rangle}{\langle U_1,U_1\rangle}U_1$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} -i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$U_3=V_3-\frac{\langle V_3,U_1\rangle}{\langle U_1,U_1\rangle}U_1-\frac{\langle V_3,U_2\rangle}{\langle U_2,U_2\rangle}U_2$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix},$$

$$U_4=V_4-\frac{\langle V_4,U_1\rangle}{\langle U_1,U_1\rangle}U_1-\frac{\langle V_4,U_2\rangle}{\langle U_2,U_2\rangle}U_2-\frac{\langle V_4,U_3\rangle}{\langle U_3,U_3\rangle}U_3$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]}{\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}\right]}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ i/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Así, tenemos la base ortogonal $\mathcal{B}_{\mathrm{o}}=\left\{\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -i & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ i/2 & 1/2\end{pmatrix}\right\}$, donde U_1 y U_2 tienen norma 1, y

$$||U_3||=\langle U_3,U_3\rangle^{1/2}=\sqrt{2},$$

$$||U_4||=\langle U_4,U_4\rangle^{1/2}=\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ i/2 & 1/2\end{pmatrix}\right]^{1/2}=\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 1/4 & -i/4\\ i/4 & 1/4\end{pmatrix}\right]^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 3: (12 puntos)

Halle las constantes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor aproxima por mínimos cuadrados a los puntos $(1, 4)$, $(-1, 0)$, $(2, -1)$ y $(3, 11)$.

a **(6 puntos)**	b **(6 puntos)**
$a = 2$	$b = 1$

Solución: El métido de solución por mínimos cuadrados nos dice que la recta que mejor aproxima los puntos dados se obtiene a partir de la solución $X = (a, b)$ del sistema $A^tAX = A^tY$, donde a es la pendiente de dicha recta y b es su punto de corte con el eje Y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^tAX = \begin{pmatrix} 15a + 5b \\ 5a + 4b \end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Debemos así resolver el sistema

$$\begin{cases} 15a + 5b = 35, \\ 5a + 4b = 14 \end{cases}$$

el cual tiene por solución $a = 2$ y $b = 1$.

(II) Desarrollo. Total: 64 puntos

Nota: Responda los ejercicios de desarrollo en las hojas blancas que se le proveerán. Identifique las hojas que vaya a entregar con su nombre, número de examen y número de cédula.

Ejercicio 4: (44 puntos)

(a) (**4 puntos**) Defina multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio de una matriz.

(b) (**10 puntos**) Dada la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hallar sus valores propios e indique para cada uno de ellos su multiplicidad algebraica y geométrica.

(c) (**10 puntos**) Demuestre que A no es diagonalizable, y halle su forma de Jordan.

(d) (**20 puntos**) Encuentre una base de Jordan para A.

Solución:

(a) Ver teórico.

(b) Primero calculamos el polinomio característico de la matriz A, que viene dado por $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_6)$. Como

$$A - \lambda I_6 = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

es una matriz por bloques, su determinante se obtiene multiplicando los determinantes de cada bloque, y como cada bloque es una matriz triangular, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (7-\lambda)^2(-\lambda)(-\lambda)^2(2-\lambda) \\ &= \lambda^3(\lambda-2)(\lambda-7)^2. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que los valores propios de A vienen dados por $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 7$, con las siguientes multiplicidades algebraicas:

$$\text{m.a.}(0) = 3, \qquad \text{m.a.}(2) = 1, \qquad \text{m.a.}(7) = 2.$$

Para calcular las multiplicidades geométricas, debemos hallar las dimensiones de los subespacios propios asociados a cada valor propio. Sean S_0, S_2 y S_7 los subespacios propios asociados a 0, 2 y 7, respectivamente.

- S_0: Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  notamos que las soluciones vienen dadas por $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$ y $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Ponemos ver entonces que S_0 es el subespacio dado por

$$S_0 = \langle (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0) \rangle.$$

  Por lo tanto, m.g.$(0) = 2$.

- S_2: Aunque es claro que m.g.$(2) = 1$, vamos a hallar S_2 para usarlo en la parte (d). Debemos resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Notamos que las soluciones vienen dadas por $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 \in \mathbb{R}$, $x_5 = 2x_4$ y $x_6 = 4x_4$. Por lo tanto, tenemos:

$$S_2 = \langle (0,0,0,1,2,4) \rangle.$$

- S_7: Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  notamos que las soluciones vienen dadas por $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ y $x_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que el subespacio propio S_7 viene dado por

$$S_7 = \langle (0,1,0,0,0,0) \rangle.$$

  Por lo tanto, m.g.$(7) = 1$.

(c) A no es diagonalizable ya que m.a.$(0) \neq$ m.g.(0) (o también porque m.a.$(7) \neq$ m.g.(7)). Ahora, vamos a hallar la forma de Jordan J de A (la cual es única salvo el orden en el que se coloquen los bloques de Jordan asociados a cada valor propio). Para el bloque de Jordan $J(0)$ asociado a 0, recordemos que m.a.$(0) = 3$ indica el tamaño de $J(0)$, mientras que m.g.$(0) = 2$ indica el número de subbloques de Jordan que aparecen dentro de $J(0)$. Tenemos entonces:

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como m.a.$(2) =$ m.g.$(2) = 1$, aquí es claro que $J(2) = (2)$. Finalmente, de manera similar al valor propio 0, tenemos que $J(7)$ tiene tamaño 2 y un solo subbloque de Jordan:

$$J(7) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la forma de Jordan de A viene dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(d) Vamos a hallar una base de Jordan $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ usando la información que aparece en los bloques de Jordan de J.

- Con respecto al valor propio 0, tenemos tres sistemas de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} Av_1 &= 0, \\ Av_2 &= v_3, \\ Av_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tenemos que v_1 y v_3 son vectores propios de A asociados a 0, y ya hemos calculado un par de ellos en la parte (b). Para saber cuál de ellos debe ser v_3, se deben ver las condiciones bajo las cuales el sistema $Av_2 = v_3$ tenga solución. Sea $v_3 = (a, b, c, d, e, f)$. Tenemos la matriz aumentada del sistema $Av_2 = v_3$ dada por:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & f \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f - 2e \end{array}\right).$$

Debe ocurrir entonces que $c = 0$ y $f = 2e$. Estas condiciones las cumple el vector propio $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ asociado a 0. Tenemos así que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ v_3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, v_2 es cualquier solución al sistema

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Todas las soluciones vienen dadas por $(0,0,s,t,1,0)$. Podemos tomar por ejemplo

$$v_2 = (0,0,0,0,1,0).$$

- v_4 es cualquier vector propio asociado a 2. Luego,

$$v_4 = (0,0,0,1,2,4).$$

- Finalmente, v_5 y v_6 vienen determinados por los sistemas de ecuaciones $Av_5 = 7v_5 + v_6$ y $Av_6 = 7v_6$, es decir, $(A-7I)v_5 = v_6$ y $(A-7I)v_6 = 0$. Luego, v_6 es cualquier vector propio asociado a 7:

$$v_6 = (0,1,0,0,0,0).$$

Para obtener v_5, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones vienen dadas por $(1,t,0,0,0,0)$. En particular, podemos tomar

$$v_5 = (1,0,0,0,0,0).$$

Por lo tanto, una base de Jordan de A viene dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 5: (20 puntos)

(a) (**5 puntos**) Defina operador ortogonal y matriz ortogonal.

(b) (**15 puntos**) Diga si la siguiente afirmación es verdadera o no: "*Todo operador ortogonal es diagonalizable*". En caso afirmativo, demuéstrela. En caso negativo, exhiba un contraejemplo y explíquelo.

Solución: Ver teórico.