Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL

EXAMEN - SÁBADO 08 DE FEBRERO DE 2020

Nro de Examen	Cédula	Nombre y apellido

- El puntaje mínimo para aprobar es 60 puntos.
- La duración del examen es tres horas.
- Todos los espacios vectoriales considerados en este examen tienen dimensión finita.

(I) Ejercicios de respuesta corta. Total: 36 puntos

Nota: Escriba en los recuadros correspondientes solamente lo que se pide en cada problema; eso será lo único que se tendrá en cuenta para la corrección.

Ejercicio 1: (12 puntos)

Sea

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

una matriz con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Halle todos los valores de α y β que cumplen que M es diagonalizable.

α **(6 puntos)**	β **(6 puntos)**

Ejercicio 2: (12 puntos)

Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de las matrices de orden 2×2 con coeficientes complejos, equipado con el producto interno $\langle -, - \rangle \colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dado por $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^* A)$, donde $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ y $B^* = \overline{B^t}$. Considere la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que se obtiene a partir de $\mathcal{B}$ mediante el procedimiento de Gram-Schmidt es:

(3 puntos)	**(3 puntos)**	**(3 puntos)**	**(3 puntos)**

Ejercicio 3: (12 puntos)

Halle las constantes a y b de la recta $y = ax + b$ que mejor aproxima por mínimos cuadrados a los puntos $(1, 4)$, $(-1, 0)$, $(2, -1)$ y $(3, 11)$.

a **(6 puntos)**	b **(6 puntos)**

(II) <u>**Desarrollo**</u>**. Total: 64 puntos**

Nota: Responda los ejercicios de desarrollo en las hojas blancas que se le proveerán. Identifique las hojas que vaya a entregar con su nombre, número de examen y número de cédula.

Ejercicio 4: (44 puntos)

(a) (**4 puntos**) Defina multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio de una matriz.

(b) (**10 puntos**) Dada la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hallar sus valores propios e indique para cada uno de ellos su multiplicidad algebraica y geométrica.

(c) (**10 puntos**) Demuestre que A no es diagonalizable, y halle su forma de Jordan.

(d) (**20 puntos**) Encuentre una base de Jordan para A.

Ejercicio 5: (20 puntos)

(a) (**5 puntos**) Defina operador ortogonal y matriz ortogonal.

(b) (**15 puntos**) Diga si la siguiente afirmación es verdadera o no: "*Todo operador ortogonal es diagonalizable*". En caso afirmativo, demuéstrela. En caso negativo, exhiba un contraejemplo y explíquelo.