Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2020**

EXAMEN - SÁBADO 15 DE AGOSTO DE 2020

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.
- La duración del examen es tres horas.
- **Todos los espacios vectoriales considerados en este parcial tienen dimensión finita.**
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.**

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}$ es el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$.
- $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que n.

(I) Verdadero Falso. Total: 20 puntos

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5
V	**V**	**V**	**F**	**V**

Ejercicio 1:
Todo operador lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tiene forma de Jordan.

Ejercicio 2:
Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Existe un producto interno sobre $\mathbb{R}^3$ para el cual B es una base **ortonormal**.

Ejercicio 3:
Considere el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$, para $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$. Entonces el representante de Riesz de T es la matriz identidad 2×2.

Ejercicio 4:
Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interno habitual. Sea $S = \{(x, y) : x = y\}$. El operador P_S, proyección ortogonal sobre S, es una **isometría**.

Ejercicio 5:
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $T : V \to V$ un operador autoadjunto tal que los únicos valores propios de T son 1 y -1. Entonces T es **ortogonal**.

(II) Múltiple opción. Total: 50 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	**D**	**B**	**C**	**D**

Ejercicio 1

Considere la matriz $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Indique la opción correcta:

A) M es **diagonalizable** sólo para un valor de α.
B) M es **diagonalizable** para una cantidad infinita de valores de α.
C) M es **diagonalizable** para todo valor de α.
D) No existe α para el cual M es **diagonalizable**.

Ejercicio 2

Considere la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 6y^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz + 2yz.$$

Indique la opción correcta:

A) Q es semidefinida positiva.
B) Q es definida positiva.
C) Q es semidefinida negativa.
D) Q es indefinida.

Sugerencia: No calcule expícitamente los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.

Ejercicio 3

Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal que cumple:

- $Ker(T) = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.
- $T(1, 0, 2) = (1, 1, 1)$.

Indique la opción correcta:

A) $\lambda = \frac{2}{3}$ es valor propio de T y T es autoadjunto.
B) $\lambda = \frac{2}{3}$ es valor propio de T y T no es autoadjunto.
C) $\lambda = 3$ es valor propio de T y T es autoadjunto.
D) $\lambda = 3$ es valor propio de T y T no es autoadjunto.

Ejercicio 4

El polinomio $p(t) = at + b$ que minimiza $\int_{-1}^{1}(t^3 - (at+b))^2 dt$ es:

A) $\frac{3}{5}t + \frac{1}{2}$.
B) $\frac{1}{5}t - \frac{1}{2}$.
C) $\frac{3}{5}t$.
D) $\frac{1}{5}t + 1$.

Ejercicio 5

Considere el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$, para $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Sea $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz fija. Se define el operador lineal $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ de la siguiente manera: $T(A) = AC$, para cada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.
Entonces, para cada $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$:

A) $T^*(B) = B^tC$.
B) $T^*(B) = CB^t$.
C) $T^*(B) = C^tB$.
D) $T^*(B) = BC^t$.

(III) Desarrollo. Total: 30 puntos

Nota: Escriba en los recuadros correspondientes solamente lo que se pide en cada problema; eso será lo único que se tendrá en cuenta para la corrección.

Considere V, un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, y $T : V \to V$ un operador **autoadjunto**.

a) (**6 puntos**) Pruebe que si λ es un valor propio de T entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución: Consideremos $v \neq 0$ un vector propio asociado al valor propio λ. Se cumple, por ser T autoadjunto, $\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle$. Además, por propiedades del producto interno:

$$\langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle,$$
$$\langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

De donde se obtiene: $\lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$. Y como $\langle v, v\rangle \neq 0$ resulta $\lambda = \overline{\lambda}$; de manera que $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) (**10 puntos**) Pruebe que si λ y μ son valores propios distintos de T, y S_λ y S_μ los correspondientes subespacios propios, entonces $S_\lambda \perp S_\mu$.

Solución: Consideremos $v \in V$ y $w \in V$ dos vectores propios (cualesquiera) asociados respectivamente a los valores propios λ y μ. Basta con probar que $\langle v, w\rangle = 0$. Se cumple, usando que T es autoadjunto, los valores propios reales, y propiedades del producto interno:

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

De donde: $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$. Como $\lambda \neq \mu$, resulta $\langle v, w\rangle = 0$. Lo que prueba que $S_\lambda \perp S_\mu$.

Considere finalmente $\mathbb{C}^2$ con el producto interno habitual y el operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya matriz asociada en la base $C = \{(1,0),(0,1)\}$ es:

$$_C(T)_C = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

c) (**2 puntos**) Pruebe que T es autoadjunto.

Solución: C es una base ortonormal y la matriz asociada a T en esa base cumple:

$$\overline{{}_C(T)_C^t} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{2i} \\ \overline{-2i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} ={}_C (T)_C.$$

Por lo tanto T es autoadjunto.

d) (**12 puntos**) Escriba los valores propios de T y proporcione una **base ortonormal** de vectores propios (no se pide incluir los cálculos).

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$.
Una base ortonormal de vectores propios es $B = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)$.