Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 13 de Julio de 2019.

No. Examen	Nombre y apellido	Cédula de Identidad

Ejercicios de multiple opción

(Respuesta correcta 11 puntos, incorrecta -3 puntos, sin responder 0 puntos)

Respuestas.				
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matriz diagonalizable tal que $\det(A) = -2$, $\operatorname{tr}(A) = -4$, y A^2 semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) 1 valor propio de A y $m.a.(1) = 2$.

(B) 1 valor propio de A y $m.a.(1) = 1$.

(C) -2 valor propio de A y $m.a.(-2) = 1$.

(D) -1 valor propio de A y $m.a.(-1) = 1$.

Ejercicio 2. Se define la función $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ como

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4,$$

para $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en $\mathbb{R}^4$. El valor de α para el cual $\langle -, - \rangle$ es un producto interno y los vectores $(-2, 1, 0, 1)$ y $(1, 1, 3, 2)$ son ortogonales es:

(A) Todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(B) $\alpha = 0$.

(C) $\alpha = -2$.

(D) Ningún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

y el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Sea $P_S(1, -1, 0)$ la proyección ortogonal de $(1, -1, 0)$ sobre S según el producto definido anteriormente. Indicar la opción correcta:

(A) $P_S(1, -1, 0) = -\frac{1}{4}(1, 1, 1)$.

(B) $P_S(1, -1, 0) = \frac{1}{4}(3, -5, -1)$.

(C) $P_S(1, -1, 0) = \frac{1}{6}(4, -7, 5)$.

(D) $P_S(1, -1, 0) = -\frac{1}{6}(2, 1, 1)$.

Ejercicio 4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1+i}{2} & b & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Los valores de a y b para los cuales A es una matriz unitaria son:

(A) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(B) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{i}{\sqrt{3}}$.

(C) $a = \frac{-1-2i}{10}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(D) $a = \frac{-1-2i}{10}$ y $b = \frac{3-4i}{5\sqrt{3}}$.

Ejercicio 5. Para la forma cuadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3,$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, hallar el intervalo más grande donde debe pertenecer a, de tal manera que Q sea indefinida.

(A) Todo $\mathbb{R}$.

(B) $(-\infty, -2]$.

(C) $[-2, +\infty)$.

(D) $[-1/2, 0]$.

Ejercicios de Desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

Ejercicio 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), y sea $T\colon V \to V$ un operador lineal.

1. Definir multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio de T. **(6 puntos)**
2. Enunciar el Teorema de la Forma Canónica de Jordan. **(5 puntos)**
3. Para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $V_i = \operatorname{Ker}[(T - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{\mu_i}]$ donde $\mu_i = \text{m.a.}(\lambda_i)$ y λ_i es un valor propio de T. Demostrar que $\dim(V_i) = \mu_i$.
   (Aquí, $(T - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{\mu_i}$ denota la composición del operador $T - \lambda_i \mathrm{Id}_V$ por μ_i veces). **(12 puntos)**

Ejercicio 7. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y con producto interno.

1. Defina operador autoadjunto sobre V. **(2 puntos)**
2. Si $T\colon V \to V$ es un operador lineal, demuestre que T es autoadjunto si, y sólo si, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$ es simétrica. **(10 puntos)**
3. Considere el espacio $V = \mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual a 2, equipado con el producto interno

   $$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad \text{para todo } p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

   Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ el operador lineal dado por

   $$T(a + bx + cx^2) = bx.$$

   - Demuestre que T no es un operador autoadjunto.
     (Sugerencia: Use la definición de adjunta de una transformación lineal). **(6 puntos)**
   - Para la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ se sabe que

     $${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

     ¿Por qué esto no contradice el hecho de que T no es autoadjunto? **(4 puntos)**

Exclusivo para uso docente	
D6	D7

Soluciones

Ejercicio 1: Como la matriz A es diagonalizable, es semejante a la matriz diagonal formada por sus vectores propios. Llamemos a esta matriz

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = -2$ y $\operatorname{tr}(A) = -4$, y además $\det(A) = \det(D)$ y $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D)$, tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -4. \end{aligned}$$

Se puede notar que si A es diagonalizable, entonces A^2 también lo es, con valores propios dados por λ_i^2 donde $i = 1, 2, 3$. Así, $A^2 \sim D^2$, y D^2 es la única matriz diagonal que satisface esta condición (salvo el orden en el que se colocan los λ_i^2). De esto se sigue que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\lambda_1^2 = 1$ ($\lambda_1 = \pm 1$), $\lambda_2^2 = 1$ ($\lambda_2 = \pm 1$) y $\lambda_3^2 = 4$ ($\lambda_3 = \pm 2$). A partir de las relaciones $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$, se deduce que la solución es $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -2$.

La respuesta correcta es la (C) en la Versión 1, y (A) en la Versión 2.

Ejercicio 2: Tenemos la función $\langle -, - \rangle \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4,$$

para $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en $\mathbb{R}^4$. Si queremos que $(-2, 1, 0, 1)$ y $(1, 1, 3, 2)$ sean ortogonales respecto a esta función, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (-2, 1, 0, 1), (1, 1, 3, 2) \rangle = 2 \cdot (-2) \cdot 1 + \alpha \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = -4 + \alpha + 6 = \alpha + 2 \\ \alpha &= -2. \end{aligned}$$

Entonces, $\langle X, Y \rangle$ queda de la forma

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4.$$

Sin embargo, esta función no es un producto interno, ya que $X = (1, 1, 0, 0) \neq \vec{0}$ y

$$\langle X, X \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

La respuesta correcta es la opción (D) en la Versión 1, y (B) en la Versión 2.

Ejercicio 3: Busquemos primero una manera más sencilla de describir el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Tenemos que $x_3 = -2x_1 - x_2$ para todo $(x_1, x_2, x_3) \in S$, es decir,

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, -2) + x_2(0, 1, -1).$$

Así,

$$S = [(1,0,-2),(0,1,-1)]\,.$$

Como $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$ y S es de dimensión 2, se tiene que

$$S^\perp = [(1,1,1)]$$

es de dimensión 1. Resulta más fácil calcular $P_{S^\perp}(1,-1,0)$, y luego podemos obtener $P_S(1,-1,0)$ a partir de la igualdad

$$(1,-1,0) = P_S(1,-1,0) + P_{S^\perp}(1,-1,0).$$

Tenemos primero que:

$$P_{S^\perp}(1,-1,0) = \frac{\langle (1,-1,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1) = \frac{2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}\cdot (1,1,1) = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

Entonces,

$$P_S(1,-1,0) = (1,-1,0) - P_{S^\perp}(1,-1,0) = (1,-1,0) - \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right).$$

La respuesta correcta es la opción (B) en la Versión 1, y la opción (D) en la Versión 2.

Ejercicio 4: La matriz A es unitaria si, y sólo si, sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas 1, 2 y 3 de A, respectivamente. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 = \langle C_1, C_3\rangle &= \left\langle \left(a, \frac{1+i}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5i}{2\sqrt{15}}, \frac{3+i}{2\sqrt{15}}, \frac{4+3i}{2\sqrt{15}}\right)\right\rangle = a\cdot\overline{\frac{5i}{2\sqrt{15}}} + \frac{1+i}{2}\cdot\overline{\frac{3+i}{2\sqrt{15}}} - \frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{4+3i}{2\sqrt{15}}} \\
&= -\frac{5ia}{2\sqrt{15}} + \frac{(1+i)(3-i)}{4\sqrt{15}} + \frac{-4+3i}{4\sqrt{15}} = -\frac{5ia}{2\sqrt{15}} + \frac{4+2i}{4\sqrt{15}} + \frac{-4+3i}{4\sqrt{15}} \\
\frac{5ia}{2\sqrt{15}} &= \frac{5i}{4\sqrt{15}} \\
a &= \frac{1}{2}. \\
0 = \langle C_2, C_3\rangle &= \left\langle \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}, b, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{5i}{2\sqrt{15}}, \frac{3+i}{2\sqrt{15}}, \frac{4+3i}{2\sqrt{15}}\right)\right\rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}\cdot\overline{\frac{5i}{2\sqrt{15}}} + b\cdot\overline{\frac{3+i}{2\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overline{\frac{4+3i}{2\sqrt{15}}} \\
&= \frac{-5}{6\sqrt{5}} + b\cdot\frac{3-i}{2\sqrt{15}} + \frac{4-3i}{6\sqrt{5}} = \frac{-1-3i}{6\sqrt{5}} + b\cdot\frac{3-i}{2\sqrt{15}} \\
\frac{1+3i}{6\sqrt{5}} &= b\cdot\frac{3-i}{2\sqrt{15}} \\
b &= \frac{1+3i}{6\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)2\sqrt{3}\sqrt{5}}{10\cdot 6\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{3}i}{10\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}i}{3} = \frac{i}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

La respuesta correcta es la opción (B) en la Versión 1, y (C) en la Versión 2.

Ejercicio 5: La matriz A que representa la forma cuadrática Q viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -a \\ 0 & -a & a-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 + (a-1)^2\lambda - a(2a+1).$$

El coeficiente del término $-\lambda^3$ siempre es negativo, mientras que el coeficiente de $(a-1)^2\lambda$ siempre es no negativo (≥ 0). Por otro lado, los únicos casos en los cuales se anulan coeficientes en $\chi_A(\lambda)$ son para $a = -2$, $a = -1/2$, $a = 0$ o $a = 1$. Hagamos entonces un análisis por casos:

- $a < -2$: Tenemos $a + 2 < 0$, $(a-1)^2 > 0$ y $-a(2a+1) < 0$. Se cuentan dos cambios de signo entre coeficientes consecutivos. Entonces, por la Regla de Descartes, A tiene exactamente dos valores propios positivos. Como en este caso 0 no es un valor propio, el valor propio restante tiene que ser negativo.

- $a = -2$: Tenemos $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda - 6$. Haciendo el mismo análisis, se tienen dos valores propios positivos y uno negativo.

- $-2 < a < -1/2$: Tenemos $a + 2 > 0$, $(a-1)^2 > 0$ y $-a(2a+1) > 0$. Tenemos un valor propio negativo y los dos restantes positivos.

- $a = -1/2$: Tenemos

  $$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{9}{4}\right) = -\lambda\left(\lambda - \frac{3}{4}(1-\sqrt{5})\right)\left(\lambda - \frac{3}{4}(1+\sqrt{5})\right).$$

  En este caso, tenemos un valor propio positivo, otro negativo, y otro nulo.

- $-1/2 < a < 0$: Tenemos $a + 2 > 0$, $(a-1)^2 > 0$ y $-a(2a+1) > 0$. En este caso, A tiene un valor propio positivo y dos negativos.

- $a = 0$: Tenemos $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -\lambda(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2})$. Luego, A tiene un valor propio positivo, uno negativo, y uno nulo.

- $0 < a < 1$: Tenemos $a + 2 > 0$, $(a-1)^2 > 0$ y $-a(2a+1) < 0$, por lo que hay dos cambios de signo entre términos consecutivos. Así, A tiene dos valores propios positivos y uno negativo.

- $a = 1$: Tenemos $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3$, de donde hay dos valores propios positivos de A y uno negativo.

- $a > 1$: Tenemos $a+2 > 0$, $(a-1)^2 > 0$ y $-a(2a+1) < 0$, de donde hay dos valores propios positivos y uno negativo.

En cualquier caso, la forma cuadrática es indefinida.

La respuesta correcta es la opción (A) en la Versión 1, y (D) en la Versión 2.

Ejercicio 6:

1. Ver teórico.

2. Ver teórico.

3. Debemos demostrar que $\dim(V_i) = \mu_i$ para el subespacio $V_i = \mathrm{Ker}[(T - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{\mu_i}]$. Sea $\chi_T(\lambda)$ el polinomio característico de T. Como $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos escribir a $\chi_T(\lambda)$ de la forma:

   $$\chi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r}$$

donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r$ son los r valores propios distintos de T ($r \leq n$). Por el Teorema de la Forma Canónica de Jordan, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

donde $J(\lambda_i)$ es el bloque de Jordan que corresponde al valor propio λ_i. Notamos que calcular $\dim(V_i)$ es lo mismo que calcular la dimensión del núcleo de la matriz $(_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n)^{\mu_i}$ (donde $n = \dim(V)$). Veamos la forma de la matriz $(_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n)^{\mu_i}$:

$$\begin{aligned}
_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n &= \begin{pmatrix} J(\lambda_1) - \lambda_i I_{\mu_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) - \lambda_i I_{\mu_2} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_i) - \lambda_i I_{\mu_i} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r) - \lambda_i I_{\mu_r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J(\lambda_1 - \lambda_i) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2 - \lambda_i) & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r - \lambda_i) \end{pmatrix}, \\
(_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n)^{\mu_i} &= \begin{pmatrix} J(\lambda_1 - \lambda_i)^{\mu_i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2 - \lambda_i)^{\mu_i} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(0)^{\mu_i} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_r - \lambda_i)^{\mu_i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que elevar a una potencia una matriz diagonal por bloques equivale a elevar cada bloque de la diagonal a dicha potencia.

Ahora, para $\lambda_j \neq \lambda_i$, tenemos que el bloque $J(\lambda_j - \lambda_i)^{\mu_i}$ es una matriz invertible (ya que toda matriz triangular superior con elementos no nulos en su diagonal es invertible). Entonces, $J(\lambda_j - \lambda_i)^{\mu_i}$ tiene núcleo nulo para $j \neq i$, por lo que calcular $\dim(V_i) = \dim(\mathrm{Ker}((_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n)^{\mu_i}))$ equivale a calcular $\dim(\mathrm{Ker}(J(0)^{\mu_i}))$. Finalmente, notamos que $J(0)^{\mu_i}$ es la matriz cero, ya que $J(0)$ es una matriz triangular superior de orden μ_i cuya diagonal principal está formada únicamente por 0 (toda matriz triangular superior con esta característica se anula cuando es elevada a su orden). Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(J(0)^{\mu_i}) = \mathbb{C}^{\mu_i}$ y $\dim(V_i) = \dim(\mathrm{Ker}(J(0)^{\mu_i})) = \dim(\mathbb{C}^{\mu_i}) = \mu_i$.

Ejercicio 7:

1. Ver teórico.

2. Ver teórico.

3. Para probar que T no es autoadjunto, basta con encontrar un par de polinomios $p_0, q_0 \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que $\langle T(p_0), q_0\rangle \neq \langle p_0, T(q_0)\rangle$. Consideremos $p_0(x) = x$ y $q_0(x) = 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \langle T(p_0), q_0\rangle &= \langle T(x), 1\rangle = \langle x, 1\rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \\ \langle p_0, T(q_0)\rangle &= \langle x, T(1)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0. \end{aligned}$$

Para la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ se sabe que

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$ es una matriz simétrica. ¿Por qué esto no contradice el hecho de que T no es autoadjunto? Pues porque $\mathcal{B}$ no es una base ortonormal. En efecto, basta notar que $\langle x, 1\rangle \neq 0$ (Este cálculo ya se hizo en la parte anterior).