Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 13 de Julio de 2019.

No. Examen

____________________ Nombre y apellido

____________________ Cédula de Identidad

Ejercicios de multiple opción

(Respuesta correcta 11 puntos, incorrecta -3 puntos, sin responder 0 puntos)

Respuestas.				
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matriz diagonalizable tal que $\det(A) = -2$, $\operatorname{tr}(A) = -4$, y A^2 semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) 1 valor propio de A y $m.a.(1) = 2$.

(B) 1 valor propio de A y $m.a.(1) = 1$.

(C) -2 valor propio de A y $m.a.(-2) = 1$.

(D) -1 valor propio de A y $m.a.(-1) = 1$.

Ejercicio 2. Se define la función $\langle -, - \rangle \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ como

$$\langle X, Y \rangle = 2x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4,$$

para $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en $\mathbb{R}^4$. El valor de α para el cual $\langle -, - \rangle$ es un producto interno y los vectores $(-2, 1, 0, 1)$ y $(1, 1, 3, 2)$ son ortogonales es:

(A) Todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(B) $\alpha = 0$.

(C) $\alpha = -2$.

(D) Ningún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

y el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Sea $P_S(1, -1, 0)$ la proyección ortogonal de $(1, -1, 0)$ sobre S según el producto definido anteriormente. Indicar la opción correcta:

(A) $P_S(1, -1, 0) = -\frac{1}{4}(1, 1, 1)$.

(B) $P_S(1, -1, 0) = \frac{1}{4}(3, -5, -1)$.

(C) $P_S(1, -1, 0) = \frac{1}{6}(4, -7, 5)$.

(D) $P_S(1, -1, 0) = -\frac{1}{6}(2, 1, 1)$.

Ejercicio 4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1+i}{2} & b & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Los valores de a y b para los cuales A es una matriz unitaria son:

(A) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(B) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{i}{\sqrt{3}}$.

(C) $a = \frac{-1-2i}{10}$ y $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(D) $a = \frac{-1-2i}{10}$ y $b = \frac{3-4i}{5\sqrt{3}}$.

Ejercicio 5. Para la forma cuadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3,$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, hallar el intervalo más grande donde debe pertenecer a, de tal manera que Q sea indefinida.

(A) Todo $\mathbb{R}$.

(B) $(-\infty, -2]$.

(C) $[-2, +\infty)$.

(D) $[-1/2, 0]$.

Ejercicios de Desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

Ejercicio 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), y sea $T\colon V \to V$ un operador lineal.

1. Definir multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio de T. **(6 puntos)**
2. Enunciar el Teorema de la Forma Canónica de Jordan. **(5 puntos)**
3. Para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $V_i = \mathrm{Ker}[(T - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{\mu_i}]$ donde $\mu_i = \mathrm{m.a.}(\lambda_i)$ y λ_i es un valor propio de T. Demostrar que $\dim(V_i) = \mu_i$.
   (Aquí, $(T - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{\mu_i}$ denota la composición del operador $T - \lambda_i \mathrm{Id}_V$ por μ_i veces). **(12 puntos)**

Ejercicio 7. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y con producto interno.

1. Defina operador autoadjunto sobre V. **(2 puntos)**
2. Si $T\colon V \to V$ es un operador lineal, demuestre que T es autoadjunto si, y sólo si, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$ es simétrica. **(10 puntos)**
3. Considere el espacio $V = \mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual a 2, equipado con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad \text{para todo } p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

   Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ el operador lineal dado por

$$T(a + bx + cx^2) = bx.$$

   - Demuestre que T no es un operador autoadjunto.
     (Sugerencia: Use la definición de adjunta de una transformación lineal). **(6 puntos)**
   - Para la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ se sabe que

$${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

     ¿Por qué esto no contradice el hecho de que T no es autoadjunto? **(4 puntos)**

Exclusivo para uso docente	
D6	D7