Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 2 de febrero de 2019.

No. Examen ______ Nombre y apellido ______ Cédula de Identidad ______

Respuestas.			
1	2	3	4

MÚLTIPLE OPCIÓN

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales en la variable x con producto interno definido $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Si aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ se obtiene el conjunto ortonormal $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ donde:

(A) $p_4(x) = 5x^3 - 3x$.

(B) $p_4(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}(7x^3 - 5x)$.

(C) $p_4(x) = 3x^3 - 5x$.

(D) $p_4(x) = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)$.

Solución
La respuesta correcta es la D.

Aplicamos Gram-Schmidt.

$u_1(x) = 1$

$$u_2(x) = x - \frac{\int_{-1}^{1} xdx}{\int_{-1}^{1} 1dx}1 = x.$$

$$u_3(x) = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3dx}{\int_{-1}^{1} x^2dx}x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2dx}{\int_{-1}^{1} 1dx}1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$u_4(x) = x^3 - \frac{\int_{-1}^1 x^3(x^2-\frac{1}{3})dx}{\int_{-1}^1 (x^2-\frac{1}{3})^2 dx}(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{\int_{-1}^1 x^4 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx}x - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 1 dx}1 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

La norma de $u_4(x)$ es $\|u_4(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5})^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{8}{7}}$. Así,

$$p_4(x) = \frac{u_4(x)}{\|u_4(x)\|} = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x).$$

Ejercicio 2. Sea $T : V \to V$ un operador lineal con V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ los números complejos. Consideremos la ecuación $T^*T = -2T$. Indicar la opción correcta:

(A) Existe T autoadjunta con valores propios 0 y -2 que satisface dicha ecuación.

(B) Existe T autoadjunta no invertible con valores propios 2 y -2 que satisface dicha ecuación.

(C) Existe T autoadjunta e invertible con valor propio 2 que satisface dicha ecuación.

(D) No existe T autoadjunta que satisfaga dicha ecuación.

Solución

La respuesta correcta es la A.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ simétrica (y por tanto autoadjunta) satisface la ecuación. Así el operador autoadjunto $T(X) = AX$ satisface la ecuación y tiene como vaps al 0 y al -2. Así que la opción A es correcta y la D es incorrecta.

Suponga ahora que T es autoadjunta tal que $T^2 = -2T$. Luego, para todo $v \in V$ se cumple que $T(T(v)) = -2T(v)$, así -2 es vap de T con veps asociados los $T(v) \neq 0$. Si T es invertible $T(v) \neq 0 \quad \forall v \in V$, entonces -2 es el único vap, de donde C es incorrecta. Ejemplo de ese caso es $T(X) = AX$ con matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ simétrica invertible que satisface la ecuación. En el caso T autoadjunta no invertible, se tiene que 0 es vap y como ya vimos que -2 es vap, la opción B es incorrecta.

Ejercicio 3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un operador lineal que cumple:

- $dim(Im(T - Id)) = 2$,
- 0 es valor propio de $T - 3Id$,
- $det(T) = 9$.

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

(A) A es la forma de Jordan de T.

(B) B es la forma de Jordan de T.

(C) A, B y C son posibles formas de Jordan de T.

(D) Ninguna de las anteriores.

Solución

La respuesta correcta es la D.

Por la parte $a)$ y el teorema de las dimensiones aplicado al operador $T - Id : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, se tiene que $dim(ker(T - Id)) = 2$ y por lo tanto 1 es vap con $mg(1) = 2 \leq ma(1)$.

Como 0 es vap de $T - 3Id$, se tiene que $ker(T - 3Id) \neq 0$ y por lo tanto 3 es vap de T.

Hasta ahora tenemos que 1 es vap por lo menos doble y que 3 es vap, como $det(T) = 9$ es el producto de los vaps, se tiene que $1 \times 1 \times 3 \times \lambda = 9$, de donde el vap restante es $\lambda = 3$. Así podemos afirmar que $ma(1) = ma(3) = 2$. Lo que no se sabe es la $mg(3)$ que puede ser 1 o 2. Dependiendo del caso, la forma de Jordan de T será A o B, es decir, A y B son posibles formas de Jordan, por lo tanto la respuesta correcta es "ninguna de las anteriores".

Ejercicio 4. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial cualquiera de dimensión finita con producto interno. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases ortonormales de V. Sea $A = {}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. A matriz ortogonal.
2. A diagonalizable en una BON.

Indicar la opción correcta:

(A) Ambas afirmaciones son verdaderas.

(B) Ambas afirmaciones son falsas.

(C) La afirmación 1 es verdadera y la afirmación 2 es falsa.

(D) La afirmación 2 es verdadera y la afirmación 1 es falsa.

Solución
La respuesta correcta es la C.
Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ortonormales de V. Consideremos $T : V \to V$ tal que $T(w_i) = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, sabemos que la T.L. resulta ortogonal por lo cual ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ resulta una matriz ortogonal. Por otro lado tenemos que

$$ {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}}\,{}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}} $$

Luego, ${}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal.
Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el PI usual y $\mathcal{B} = \{(0, -1), (1, 0)\}$ y $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ambas bases ortonormales, sin embargo,

$$ {}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} $$

no es diagonalizable.

DESARROLLO

Ejercicio 5.

1. Enuncie el Teorema de Descomposición en valores singulares de una matriz.

2. Demuestre el Teorema de Descomposición en valores singulares de una matriz.

Nota: Puede usar el enunciado siguiente para la demostración:

Teorema Sean V y W espacios vectoriales con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con rango$(T) = r$. Entonces existe $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V, $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W y escalares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ tales que $T(v_i) = \sigma_i w_i$ si $i = 1, \ldots, r$ y $T(v_i) = 0$ si $i = r+1, \ldots, n$. Es decir, $T(v_i) = \sigma_i w_i$ con $\sigma_i > 0$ $\forall i = 1, \ldots, r$ y $\sigma_i = 0$ $\forall i = r + 1, \ldots, n$.

Solución Ver teórico.

Ejercicio 6.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y S un subespacio de V.

1. Defina proyección ortogonal sobre S.
2. Probar que
$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\| \text{ para todo } s \in S.$$
3. Hallar el punto de la recta $r : (x, y, z, t) = \lambda(0, 0, 2, 1)$ más cercano a $(3, 0, 0, -5)$ considerando en $\mathbb{R}^4$ la norma euclídea.

Solución

1. Ver teórico.
2. Ver teórico.
3. La norma euclídea es la norma inducida por el producto interno usual en $\mathbb{R}^4$, luego, el punto más cercano a $(3, 0, 0, -5)$ en $r = [(0, 0, 2, 1)]$ es la proyección de $(3, 0, 0, -5)$ sobre $[(0, 0, 2, 1)]$, es decir,
$$P_{[(0,0,2,1)]}(3, 0, 0, -5) = \langle (3, 0, 0, -5), \frac{(0, 0, 2, 1)}{\|(0, 0, 2, 1)\|} \rangle \frac{(0, 0, 2, 1)}{\|(0, 0, 2, 1)\|} = (0, 0, -2, -1).$$