# Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 2 de febrero de 2019.

| | | |
|---|---|---|
| No. Examen | Nombre y apellido | Cédula de Identidad |

| Respuestas. | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | |

MÚLTIPLE OPCIÓN

**Ejercicio 1.** Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales en la variable $x$ con producto interno definido $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Si aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ se obtiene el conjunto ortonormal $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ donde:

(A) $p_4(x) = 5x^3 - 3x$.

(B) $p_4(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}(7x^3 - 5x)$.

(C) $p_4(x) = 3x^3 - 5x$.

(D) $p_4(x) = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)$.

**Ejercicio 2.** Sea $T : V \to V$ un operador lineal con $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ los números complejos. Consideremos la ecuación $T^*T = -2T$. Indicar la opción correcta:

(A) Existe $T$ autoadjunta con valores propios 0 y $-2$ que satisface dicha ecuación.

(B) Existe $T$ autoadjunta no invertible con valores propios 2 y $-2$ que satisface dicha ecuación.

(C) Existe $T$ autoadjunta e invertible con valor propio 2 que satisface dicha ecuación.

(D) No existe $T$ autoadjunta que satisfaga dicha ecuación.

**Ejercicio 3.** Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un operador lineal que cumple:

- $dim(Im(T - Id)) = 2$,
- 0 es valor propio de $T - 3Id$,
- $det(T) = 9$.

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar la opción correcta:

(A) $A$ es la forma de Jordan de $T$.

(B) $B$ es la forma de Jordan de $T$.

(C) $A$, $B$ y $C$ son posibles formas de Jordan de $T$.

(D) Ninguna de las anteriores.

**Ejercicio 4.** Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial cualquiera de dimensión finita con producto interno. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases ortonormales de $V$. Sea $A = {}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $A$ matriz ortogonal.
2. $A$ diagonalizable en una BON.

Indicar la opción correcta:

(A) Ambas afirmaciones son verdaderas.

(B) Ambas afirmaciones son falsas.

(C) La afirmación 1 es verdadera y la afirmación 2 es falsa.

(D) La afirmación 2 es verdadera y la afirmación 1 es falsa.

DESARROLLO

**Ejercicio 5.**

1. Enuncie el Teorema de Descomposición en valores singulares de una matriz.
2. Demuestre el Teorema de Descomposición en valores singulares de una matriz.

Nota: Puede usar el enunciado siguiente para la demostración:

**Teorema** Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$ y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con rango$(T) = r$. Entonces existe $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de $V$, $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de $W$ y escalares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ tales que $T(v_i) = \sigma_i w_i$ si $i = 1, \ldots, r$ y $T(v_i) = 0$ si $i = r+1, \ldots, n$. Es decir, $T(v_i) = \sigma_i w_i$ con $\sigma_i > 0$ $\forall i = 1, \ldots, r$ y $\sigma_i = 0$ $\forall i = r+1, \ldots, n$.

**Ejercicio 6.**

Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $S$ un subespacio de $V$.

1. Defina proyección ortogonal sobre $S$.
2. Probar que
$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\| \text{ para todo } s \in S.$$
3. Hallar el punto de la recta $r : (x, y, z, t) = \lambda(0, 0, 2, 1)$ más cercano a $(3, 0, 0, -5)$ considerando en $\mathbb{R}^4$ la norma euclídea.