Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2019**

EXAMEN - MARTES 10 DE DICIEMBRE DE 2019

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje mínimo para aprobar es 55 puntos.
- La duración del examen es tres horas.
- **Todos los espacios vectoriales considerados en este examen tienen dimensión finita.**
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.**

Notación: En el examen se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}$ es el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$.

(I) Ejercicios de respuesta corta. Total: 35 puntos

Nota: Escriba en los recuadros correspondientes solamente lo que se pide en cada problema; eso será lo único que se tendrá en cuenta para la corrección.

Ejercicio 1: (15 puntos)

Considere la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se usa la descomposición en valores singulares para escribir $A = USV^t$, con U y V matrices **ortogonales** y S matriz **diagonal** (cuyos valores en la diagonal están ordenados de mayor a menor).
Las matrices U, S y V son:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: (10 puntos)

Considere $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos habituales. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x + 2y, z + x)$.
La transformación adjunta $T^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es:

$$T^*(a, b) = (a + b, 2a, b)$$

Ejercicio 3: (10 puntos)

Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = traza(B^t A)$. Considere además el funcional lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - b + d.$$

El representante de Riesz del funcional T es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(II) **Desarrollo**. **Total: 65 puntos**

Ejercicio 4: (45 puntos)

Considere V, un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y S un subespacio de V tal que $S \neq \{0\}$ y $S \neq V$.

a) (**5 puntos**) Defina el complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

Ver definición 4.5 del libro rojo.

b) (**10 puntos**) Pruebe que $V = S \oplus S^\perp$.

Ver proposición 8 del libro rojo.

c) (**5 puntos**) Defina P_S, la proyección ortogonal sobre S, a partir de una base ortonormal de S.

Ver definición 4.6 del libro rojo.

Considere ahora $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$.

d) (**10 puntos**) Calcule $P_S(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

El plano S tiene al conjunto $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$ como base ortonormal. Por lo tanto

$$P_S(x, y, z) = (\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2})$$

e) (**15 puntos**) Escriba los valores propios y los correspondientes subespacios propios de la proyección ortogonal P_S hallada en la parte anterior. ¿Es diagonalizable P_S?

Sabemos que $P_S(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_S(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ por estar ambos vectores en S. Además $P_S(1, 0 - 1) = 0$ por ser este último vector un generador de $S^\perp$.
Por lo tanto 1 y 0 son los valores propios de P_S y los subespacios propios asociados son:
$S_1 = \langle(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\rangle = S$ y $S_0 = \langle(1, 0 - 1)\rangle = S^\perp$.

Finalmente P_S es diagonalizable.

Ejercicio 5: (20 puntos)

Considere V, un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, y $T : V \to V$ un operador autoadjunto.

a) (**10 puntos**) Pruebe que si λ es un valor propio de T entonces λ es real.

Si λ es valor propio de T entonces existe $v \neq \overrightarrow{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Entonces $\langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$.
Por otro lado, como T es autoadjunta, tenemos que $\langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$. Entonces $\lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$ y como $v \neq \overrightarrow{0}$ tenemos que $\lambda = \overline{\lambda}$ y por lo tanto real.

b) (**10 puntos**) Pruebe que si S_λ y S_μ son subespacios propios de dos valores propios distintos de T entonces $S_\lambda \perp S_\mu$.

Si $v \in S_\lambda$ y $w \in S_\mu$ como T es autoadjunta tenemos que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$. Como arriba $\langle T(v), w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ y $\langle v, T^*(w)\rangle = \mu\langle v, w\rangle$. Por lo tanto $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$ y como $\lambda \neq \mu$, $\langle v, w\rangle = 0$.