Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Sábado 14 de julio de 2018.

Soluciones del examen

Ejercicio 1.

1. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal definida sobre un espacio vectorial V de dimensión n.

   (a) Definir valor y vector propio de T.

   (b) Definir multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio λ.

   (c) Probar que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n$.

   Ver teórico.

2. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Determinar los valores de a para los cuales la matriz A es diagonalizable.

   (b) Determinar en cada caso la forma canónica de Jordan y su respectiva base de Jordan.

   Solución

   Es fácil ver que el rango de A es 1, por lo tanto la dimensión del núcleo de A es 2, esto dice que el 0 es valor propio de A con multiplicidad geométrica 2.

   Es fácil ver que $ker(A) = [(1,0,1),(0,1,a)]$. Para hallar todos los valores propios consideremos el polinomio característico de A,

   $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & -1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & a & -1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\lambda^2$, de donde los valores propios son $\lambda = 0$ con $ma(0) = 2$ y $\lambda = a$ con $ma(a) = 1$.

Caso $a \neq 0$ En este caso tenemos que $ma(0) = mg(0) = 2$ y $1 \leq mg(a) \leq ma(a) = 1$, por lo tanto A es diagonalizable. El núcleo de $A - aI = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1-a \end{pmatrix}$ está generado por $(1,1,1)$, luego $S_a = [(1,1,1)]$. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,a),(1,1,1)\}$.

Esta es la base de Jordan y ${}_{\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Caso $a = 0$ En ese caso $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3$ y por lo tanto $ma(0) = 3$. Como sabíamos que $mg(0) = 2$, se tiene que A no es diagonalizable. Su matriz de Jordan tiene la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo visto antes, $S_0 = ker(A) = [(1,0,1),(0,1,0)]$. Su base de Jordan $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ debe cumplir que $Av_1 = Av_3 = 0$ y $Av_2 = v_3$, por lo tanto $A^2 v_2 = Av_3 = 0$. Tomaremos $v_2 \in ker(A^2)$ y $v_2 \notin ker(A)$, como $A^2 = 0$ podemos elegir $v_2 = (1,0,0)$. Se tiene que $Av_2 = (1,1,1) \in ker(A)$, luego tomamos $v_3 = (1,1,1)$ y basta tomar $v_1 = (0,1,0)$ que sabemos está en $ker(A)$ y es L.I con el $(1,1,1)$.

Ejercicio 2.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y S un subespacio de V. Sea $\{v_1, \dots, v_l\}$ una base ortonormal de S.

   (a) Demostrar que

   $$\sum_{i=1}^{l} \langle v, v_i \rangle v_i \in S \quad \text{y que} \quad v - \sum_{i=1}^{l} \langle v, v_i \rangle v_i \in S^{\perp}$$

   .

   (b) Demostrar que $V = S \oplus S^{\perp}$.

   Ver teórico.

2. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el siguiente producto interno

   $$\langle (x,y,z),(x',y',z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$$

   Hallar $P_S(1,1,3)$ donde $S = \{(x,y,z) : 2x - 2y + 3z = 0\}$.

Solución

Para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, de donde $P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v)$. Es claro que $dimS = 2$, por ser un plano, luego $dimS^{\perp} = 1$ (ver parte 1(b)). Proyectaremos sobre $S^{\perp}$.

$$S^{\perp} = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : xx' + 2yy' + 3zz' = 0, \text{donde} \quad 2\text{x} - 2\text{y} + 3\text{z} = 0\}$$

Luego, el vector $(2,-1,1)$ genera a $S^{\perp}$.

Se cumple que,

$$\|(2,-1,1)\| = \sqrt{4+2+3} = 3$$

y,

$$\langle(1,1,3),(2,-1,1)\rangle = 2-2+9 = 9.$$

Entonces, $P_{S^\perp}(1,1,3) = \frac{1}{3}\langle(1,1,3),(2,-1,1)\rangle\frac{1}{3}(2,-1,1) = \frac{9}{9}(2,-1,1) = (2,-1,1)$. Luego, $P_S(1,1,3) = (1,1,3)-(2,-1,1) = (-1,2,2)$.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Enunciar el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.
2. Demostrar que si T es diagonalizable en una base ortonormal y $\lambda \in \mathbb{R}$ para todo λ valor propio de T entonces T es autoadjunta.

   Ver teórico.
3. Hallar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta tal que

$$T(1,-1,0) = (-1,1,0) \quad \text{y} \quad \text{ma}(3) = 2.$$

Notemos que $(1,-1,0)$ es vector propio asociado al valor propio -1. Como $ma(3) = 2$, se tiene que $ma(-1) = 1$. Para que T sea autoadjunta, se debe cumplir $S_{-1} \perp S_3$ y $\dim S_3 = 2$, es decir, S_3 es un plano. Como $S_{-1} = [(1,-1,0)]$, el vector $(1,-1,0)$ es ortogonal a S_3 y por lo tanto se tiene que $S_3 = \{(x,y,z) : x-y=0\} = [(1,1,0),(0,0,1)]$. Resumiendo, $T(1,-1,0) = -1(1,-1,0)$, $T(1,1,0) = 3(1,1,0)$ y $T(0,0,1) = 3(0,0,1)$.

Tenemos que $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ es una base ortogonal de vectores propios. Hallaremos las coordenadas de cualquier vector (x,y,z) en esta base,

$$(x,y,z) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1).$$

Haciendo los cálculos llegamos a $\alpha = \dfrac{x-y}{2}$, $\beta = \dfrac{x+y}{2}$ y $\gamma = z$, luego

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (\frac{x-y}{2})T(1,-1,0) + (\frac{x+y}{2})T(1,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= (\frac{x-y}{2})(-1,1,0) + (\frac{x+y}{2})(3,3,0) + z(0,0,3) \\ &= (x+2y, 2x+y, 3z) \end{aligned}$$

.

Ejercicio 4.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que $Ker\, T^*T = Ker\, T$ y que $rg\, T^*T = rg\, T$.

   Ver demostración del Lema 1 en las notas "Descomposición en valores singulares".

2. Hallar la descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y verificar.

Solución

Queremos encontrar una descomposición de la forma $A = USV^T$. Para ello, comencemos por hallar los valores singulares de A.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(A^T A - \lambda I) = \lambda(4-\lambda)(\lambda - 5)$, de donde los valores propios de $A^T A$ son $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5$ y los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{5}, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 0$.

Se tiene entonces que $S = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallemos una base ortonormal de $A^T A$. Haciendo las cuentas, se tiene que

$$ker(A^T A - 5I) = [(2,0,1)],\ ker(A^T A - 4I) = [(0,1,0)] \quad \text{y} \quad ker(A^T A) = [(1,0,-2)].$$

Luego, una base ortonormal de $A^T A$ es $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)\}$, de donde

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Para calcular las columnas u_1 y u_2 de la matriz U, hacemos $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ para $i = 1, 2$, donde v_i son vectores de la base $\mathcal{B}$. Luego,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

La descomposición en valores singulares queda así,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = USV^T.$$