SOLUCIÓN EXAMEN DE FEBRERO DE 2018

Ejercicios múltiple opción.

Ejercicio 1. Opción correcta: 1.

Ejercicio 2. Opción correcta: 3.

Ejercicio 3. Opción correcta: 1.

Ejercicio 4. Opción correcta: 4.

Ejercicio 5 . Opción correcta: 1.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1.

1) Ver libro rojo.

2) Primero vamos a probar que $Ker(T^*) \subset [Im(T)]^\perp$.
Sea $w \in Ker(T^*)$, por definición de T^* tenemos que $< T(v), w >=< v, T^*(w) >$ para todo $v \in V$. Como $w \in Ker(T^*)$ entonces $T^*(w) = 0$, lo que implica que $< T(v), w >= 0$ para todo $v \in V$. De donde se deduce que $w \perp T(v)$ para todo $v \in V$, lo que implica que $v \in [Im(T)]^\perp$.

Ahora vamos a probar que $[Im(T)]^\perp \subset Ker(T^*)$.
Sea $w \in [Im(T)]^\perp$, entonces se cumple que $w \perp T(v)$ para todo $v \in V$. De lo anterior y la igualdad $< T(v), w >=< v, T^*(w) >$ deducimos que $< v, T^*(w) >= 0$ para todo $v \in V$. Entonces $T^*(w) = 0$, lo que implica que $w \in Ker(T^*)$.

3) Aplicando la parte 2) a T^* obtenemos $Ker((T^*)^*) = [Im(T^*)]^\perp$. Como $(T^*)^* = T$ se tiene que $Ker(T) = [Im(T^*)]^\perp$. Luego $(Ker(T))^\perp = [[Im(T^*)]^\perp]^\perp$. De donde se deduce que $(Ker(T))^\perp = Im(T^*)$.
Se puede hacer una prueba alternativa razonando como en la parte 2), probando que $Im(T^*) \subset [Ker(T)]^\perp$ y que $Im(T^*) \supset [Ker(T)]^\perp$.