Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Geometría y Álgebra Lineal II

Examen - 3 de febrero de 2018. Duración: 3:30

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej1	Ej2	**Total**

Para aprobar el examen el puntaje mínimo es 60 puntos.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN.

Respuesta correcta de cada ejercicio 12 puntos, incorrecta -2,5 puntos y sin responder 0 punto.

Ejercicio 1 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ donde } a \in \mathbb{R}.$$

Indique la opción correcta:

1. A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. Existe un solo valor de a para el cual A no es diagonalizable.
3. Existen dos valores de a para los cuales A no es diagonalizable.
4. Para ningún valor de a se cumple que A es diagonalizable.
5. Existen tres valores de a para los cuales A no es diagonalizable.

Ejercicio 2 Sean $Q_0, Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas y las siguientes afirmaciones:

(I) Si Q_0 y Q_1 son definidas positivas entonces $Q_0 + Q_1$ es definida positiva.

(II) Existen Q_0 y Q_1 definidas positivas tales que $Q_0 - Q_1$ es indefinida.

(III) Existen Q_0 y Q_1 indefinidas tales que $Q_0 + Q_1$ es definida negativa.

Indique la opción correcta:

1. Ninguna de las afirmaciones son verdaderas.
2. Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.
3. Todas las afirmaciones son verdaderas.
4. Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
5. Solamente la afirmación (I) es verdadera.

Ejercicio 3

Sea C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$_C(T)_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Entonces la transformación corresponde a:

1. Una simetría respecto al plano $x + y - 2z = 0$.
2. Una simetría axial respecto a la recta $[(1, 1, -2)]$.
3. Una simetría axial respecto a la recta $[(2, 0, 1)]$..
4. Rotación de ángulo $\pi/2$ y eje $[(1, 1, -2)]$. .
5. Una simetría respecto al plano $x - 2z = 0$..

Ejercicio 4

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual y $k \in \mathbb{R}$. Definimos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como

$$T(x, y, z) = k(x + 2y + 2z, 2x - 2y + z, 2x + y - 2z).$$

Indique la opción correcta:

1. Para todo $k \in R$ se cumple que T es ortogonal.
2. Existe un único $k \in \mathbb{R}$ para el cual T es ortogonal.
3. No existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual T es ortogonal.
4. Existen exactamente dos valores de k para los cuales T es ortogonal.
5. Existe un único $k \in \mathbb{R}$ para el cual T es autoadjunta.

Ejercicio 5

Sea $<,>: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un producto interno que cumple las siguientes propiedades:

- $< (1, 0), (1, 0) >= 2$,
- $< (1, 0), (1, 1) >= 1$ y
- $< (1, 1), (1, 1) >= 2$.

Para que $\{(1/\sqrt{2}, 0), (a, b)\}$ sea un conjunto ortonormal, con $a > 0$, debe cumplirse:

1. $(a, b) = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.
2. $(a, b) = (1/\sqrt{3}, 3/\sqrt{3})$.
3. $(a, b) = (1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2})$.
4. $(a, b) = (1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$.
5. $(a, b) = (1/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

Ejercicio 1 (20 puntos)
Sean V, W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los complejos, $T : V \to W$ una transformación lineal y $T^* : W \to V$ su adjunta. Probar:

1. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.(6 puntos)

2. $Ker(T^*) = [Im(T)]^{\perp}$.(8 puntos)

3. $Im(T^*) = [Ker(T)]^{\perp}$.(6 puntos)

Ejercicio 2(20 puntos)
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Definir valor y vector propio.(4 puntos)

2. Definir subespacio propio.(4 puntos)

3. Sea $A =_B (T)_B$, la matriz asociada en la base $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a la transformación lineal $T : V \to V$. Entonces v es vector propio de T con valor propio λ si y solo si las coordenadas de v en la base B son una solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (12 puntos)}$$