Examen de Geometría y Álgebra Lineal 2

Miércoles 5 de diciembre de 2018.

Ejercicio 1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Consideremos las siguientes afirmaciones:
(i) Si T es sobreyectiva entonces T^* es inyectiva.
(ii) $Ker(T^*T) = Im(T^*)$.
Indicar la opción correcta:

(A) Sólo la opción (i) es verdadera.

(B) Sólo la opción (ii) es verdadera.

(C) Las dos opciones son falsas.

(D) Las dos opciones son verdaderas.

Solución

Si T es sobreyectiva entonces $Im(T) = W$. Como $Im(T)$ es un subespacio de W, se tiene que $W = Im(T) \oplus [Im(T)]^{\perp}$, en particular esto dice que $[Im(T)]^{\perp} = \{0\}$. Por propiedad de la adjunta se tiene que $Ker(T^*) = [Im(T)]^{\perp} = \{0\}$ por lo cual T^* es inyectiva.

Otras dos propiedades de la adjunta establecen que $Ker(T^*T) = Ker(T)$ y $Im(T^*) = [Ker(T)]^{\perp}$. Como $[Ker(T)]^{\perp} \neq Ker(T)$, la igualdad en (ii) es falsa. Luego, solo la opción (i) es verdadera.

Ejercicio 2. Se obtienen los siguientes datos

x	y
0	0
1	0
-1	1

para una sustancia que verifica la ecuación

$$y = ax^3 + b(x+1)$$

donde a y b son parámetros reales. Los valores de a y b que mejor aproximan (en el sentido de mínimos cuadrados) los datos dados son:

(A) $a = 1$ y $b = 0$.

(B) $a = -\frac{5}{6}$ y $b = \frac{1}{3}$.

(C) $a = -\frac{2}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.

(D) $a = -1$ y $b = 1$.

Solución

Se quiere hallar el vector $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de parámetros que mejor ajustan la función $f(x) = ax^3 + b(x+1)$. Tenemos entonces el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

llamando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y resolviendo la ecuación $A^T AX = A^T Y$ donde $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtiene la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados.

Esto es, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de donde se obtiene que $a = -\frac{5}{6}$ y $b = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor igual a 2 con el producto interno definido como $\langle p, q \rangle = 3aa' + 2bb' + cc'$ si $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $q(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Consideremos $p_0(x) = 1 + x + x^2$, $q_0 = 1 + x^2$ y $S = [1 + x^2]$. Indicar la opción correcta:

(A) La proyección de p_0 sobre S es q_0.

(B) La proyección de p_0 sobre S es $2q_0$.

(C) La proyección de p_0 sobre S es $\frac{1}{2}q_0$.

(D) La proyección de p_0 sobre S es $\sqrt{2}q_0$.

Solución

$\langle 1 + x^2, 1 + x^2 \rangle = 4$, luego la norma de $q_0(x)$ es 2.

$$P_S(p_0) = \langle 1 + x + x^2, \frac{1 + x^2}{2} \rangle \frac{1 + x^2}{2} = 1 + x^2 = q_0$$

.

Ejercicio 4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $B = A^T A$ y se considera la forma cuadrática $f(X) = X^T BX$. Considere también la descomposición en valores singulares $A = USV^T$.

Afirmaciones.

i. f es definida positiva.

ii. La primer columna de U es $\pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

iii. Una base de Jordan de B es $\{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

iv. La matriz $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ es tal que $B = PDP^{-1}$.

Señale la opción que considere correcta.

(A) Todas las afirmaciones son correctas.

(B) La afirmación (i) es incorrecta y las afirmaciones (ii), (iii), y (iv) son correctas.

(C) Las afirmaciones (i) y (iv) son incorrectas y las afirmaciones (ii) y (iii) son correctas.

(D) Solo la opción (ii) es correcta.

Solución

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(B - xI) = x(1-x)(x-3)$ de donde los valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$, por lo que f es semidefinida positiva. La afirmación (i) es falsa.

$S_0 = N(B) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ con norma $\sqrt{3}$. $S_1 = N(B - I) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$ con norma $\sqrt{2}$. $S_3 = N(B - I) = [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ con norma $\sqrt{6}$. Luego, una base de Jordan de B es $\{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. La afirmación (iii) es verdadera.

$$w_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De donde $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, pero también sirve la U con signos cambiados. La afirmación (ii) es verdadera.

Al hacer las cuentas con la matriz P y la matriz $D = diag(0, 1, 3)$ nos da distinto de B. La afirmación (iv) es falsa. La opción correcta para esta versión es la C.

DESARROLLO

Ejercicio 5.

1. Se considera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la siguiente transformación lineal:

   $$T(x, y, z) = (3x + y - z, 0, -x + y + 3z).$$

   Probar que T es diagonalizable y hallar una base de vectores propios.

2. Determinar un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el cual la base $\{(1, -2, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$ resulte ortonormal.

3. Determinar un producto interno para el cual la transformación lineal T resulte autoadjunta. Justificar.

4. Probar que para toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizable existe un producto interno para el cual resulta autoadjunta.

   Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizable, luego, existe $\{u, v, w\}$ base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios. Consideremos $\langle\ ,\ \rangle$ P.I. en $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u, v, w\}$ resulte ortonormal, tenemos entonces que T es diagonalizable en una base ortonormal y sus valores propios reales, por lo cual T resulta autoadjunta para el producto interno definido.

Solución

1. La matriz asociada a T en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\chi_T(x) = det(A - xI) = -x(x-2)(x-4)$, de donde los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = 4$ y los subespacios propios $S_0 = N(A) = [(1, -2, 1)]$, $S_2 = N(A - 2I) = [(1, 0, 1)]$ y $S_4 = N(A - 4I) = [(-1, 0, 1)]$.

Luego $\{-1,-2,1),(1,0,1),(-1,0,1)\}$ es una base de vectores propios es por lo que resulta diagonalizable.

2. Sabemos que $(x,y,z)=\alpha(1,-2,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(-1,0,1)$ y $(x',y',z')=\alpha'(1,-2,1)+\beta'(1,0,1)+\gamma'(-1,0,1)$, luego

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

Sabemos que

$$\alpha = -\frac{y}{2} \qquad \beta = \frac{z-x}{2} \qquad \gamma = \frac{-y+z-3x}{2}$$

Luego

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = \frac{y}{2}\frac{y'}{2} + \frac{(z-x)}{2}\frac{(z'-x')}{2} + \frac{(-y+z-3x)}{2}\frac{(-y'+z'-3x')}{2}$$

Otra forma de hacerlo:

Sabemos que todo producto interno $\langle X,Y\rangle$ en un espacio real, es de la forma X^TAY con A simétrica. Luego, $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = (x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z'\end{pmatrix}\} = axx' + byx' + czx' + bxy' + dyy' + ezy' + cxz' + eyz' + fzz'$.
Para que la base sea ortonormal se debe cumplir:

$$\langle (1,0,1),(1,0,1)\rangle = a+2c+f = 1,$$

$$\langle (-1,0,1),(-1,0,1)\rangle = a-2c+f = 1,$$

$$\langle (1,0,1),(-1,0,1)\rangle = -a+f = 0,$$

de donde $a=f=\frac{1}{2}$, $c=0$.
A su vez, se debe cumplir que

$$\langle (1,0,1),(1,-2,1)\rangle = \frac{1}{2} - 2b - 2e + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\langle (-1,0,1),(1,-2,1)\rangle = -\frac{1}{2} + 2b - 2e + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\langle (1,-2,1),(1,-2,1)\rangle = -1 + 4d = 1$$

de donde $b+e=\frac{1}{2}$, $b=e$, $b=e=\frac{1}{4}$ y $d=\frac{1}{2}$.

El producto interno buscado es entonces

$$\frac{1}{2}xx' + \frac{1}{4}yx' + \frac{1}{4}xy' + \frac{1}{2}yy' + \frac{1}{4}zy' + \frac{1}{4}yz' + \frac{1}{2}zz'.$$

3. La base de vectores propios resulta ortonormal según el producto interno definido anteriormente, como además los valores propios son reales se tiene que T resulta autoadjunta.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizable, luego, existe $\{u, v, w\}$ base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios. Consideremos $\langle\ ,\ \rangle$ P.I. en $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u, v, w\}$ resulte ortonormal, tenemos entonces que T es diagonalizable en una base ortonormal y sus valores propios reales, por lo cual T resulta autoadjunta para el producto interno definido.

Ejercicio 6.

1. Enuncie el Teorema Espectral para operadores unitarios. ¿Vale este resultado para operadores ortogonales? Enunciar o dar un contraejemplo.

2. Demostrar el Teorema Espectral para operadores unitarios.

Solución

Ver teórico.