Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Geometría y Álgebra Lineal II

EXAMEN - 15 DE JULIO 2017. DURACIÓN: 3:30

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

Ejercicio 1 (35 puntos)

1. Hallar un producto interno para el cual el conjunto $\{(1,0),(1,1)\}$ sea un conjunto ortonormal.(10 puntos)
2. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(3y-x,2y)$.
   a) Probar que con el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, T no es autoadjunta.(5 puntos)
   b) Hallar un producto interno en $\mathbb{R}^2$ para el cual T es autoadjunta.(10 puntos)
   c) Sea $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal cualquiera. ¿Existe un producto interno en $\mathbb{R}^2$ para el cual S es autoadjunta? Justificar.(10 puntos)

Ejercicio 2(35 puntos)

1. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la rotación de centro el origen y ángulo $\frac{\pi}{2}$ (en sentido antihorario) y S la simetría respecto a la recta $y=x$. Clasificar la isometría $S\circ T$ (si es una simetría, decir respecto a que eje y si es una rotación, hallar el ángulo). (15 puntos)
2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z)=\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}y}{2}+\frac{z}{2},-\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{\sqrt{2}z}{2},\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}y}{2}+\frac{z}{2}\right)$$

   a) Probar que es una rotación respecto de un eje e. Hallar el eje y el ángulo de rotación.(10 puntos)
   b) Sea $S=[e]$ donde e es el eje hallado en la parte anterior. Hallar $P_{S^\perp}(1,1,1)$.(10 puntos)

Ejercicio 3(30 puntos)

1. Sean V y W espacios vectoriales con producto interno y de dimensión finita. Probar que para cada $T:V\to W$ lineal, existe una única $T^*:W\to V$ tal que $<T(v),w>=<v,T^*(w)>$ para todo $v\in V$ y para todo $w\in W$.(15 puntos)
2. Sea $T:V\to V$ con $T=T^*$.
   a) Probar que si $\mathbb{k}=\mathbb{C}$ entonces las raices del polinomio característico son reales.(5 puntos)
   b) Probar que si $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ entonces las raices del polinomio característico son reales.(10 puntos)