Práctico 13

1. Función primitiva y Función inversa

Guía de ejercicios: 2, 5, 7, 8, 11 y 12

1. Demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es no positiva (respectivamente no negativa) en I entonces la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
es monótona decreciente (respectivamente monótona creciente).

2. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
   a) Demostrar que la función restricta a los reales positivos es monótona decreciente y que es creciente cuando la definimos en los reales negativos. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ mostrar que f es integrable en $[a, b]$
   Ahora se considera la función primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$
   b) Demostrar que F es continua, impar y estrictamente creciente.
   La función F es la función $\arctan(x)$.

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dar condiciones a f para que la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sea inyectiva.

4. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva y no monótona.

5. Determinar en cada caso los intervalos maximales donde la función sea invertible.

   a) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x+5$ *b*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |2x+5|$ *c*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = -2x^3+3$

   d) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ *e*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |x^2 + x - 2|$

   f) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin(x)$ *g*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = \cos(x)$ *h*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = \tan(x)$

6. Sean enteros $m, n \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$. Demostrar las siguientes igualdades para $x, y \geq 0$:

   a) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ *b*) $\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$ *c*) $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$ *d*) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crecientes. Probar que $f + g$, $f \circ g$, $\max\{f, g\}$. son monótonas.

8. Verificar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua y no es monótona en ningún intervalo de la forma $[0, a]$ con $a > 0$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona y biyectiva. Probar que f es continua.

10. Considere la función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(x)$.

    a) Pruebe que es continua y creciente.

    b) Justifique porqué podemos definir la función $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la inversa de $\sin(x)$. Muestre que es continua, impar y creciente.

    c) Grafique arcsin y calcule los valores de $\arcsin 1$ $\arcsin -1$, $\arcsin 0$, $\arcsin \frac{1}{2}$ y $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Considere la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$.

    a) Pruebe que es continua y creciente.

    b) Justifique porqué podemos definir la función $\arccos : [-1, 1] \to [0, 2\pi]$ la inversa de $\cos(x)$. Muestre que es continua y creciente.

    c) Grafique arccos y calcule los valores de $\arccos 1$ $\arccos -1$, $\arccos 0$, $\arccos \frac{1}{2}$ y $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Considere la función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x)$.

    a) Pruebe que es continua, creciente y sobreyectiva .

    b) Justifique porqué podemos definir la función $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la inversa de $\tan(x)$. Muestre que es continua, par y creciente.

    c) Muestre que

    $$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

    d) Grafique arctan.
    En el ejercicio 2 de este práctico dimos otra definición de arctan que maás adelante probaremos que son lo mismo.

2. Continuidad uniforme

Guía de ejercicios: 1, 3, 4, 5 y 6.

1. Determinar en cada caso si f es uniformemente continua en I:

$$a)\ \ f(x) = [x] \quad I = [0, 1] \qquad b)\ \ f(x) = [x] \quad I = (0, 1)$$

$$c)\ \ f(x) = \frac{1}{x} \quad I = [1, 2] \qquad d)\ \ f(x) = \frac{1}{x} \quad I = [1, +\infty) \qquad e)\ \ f(x) = \frac{1}{x} \quad I = (0, 2)$$

2. Estudiar continuidad uniforme de las siguientes funciones

$a)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=ax+b$ $b)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=|x|$

$c)$ $f:(-a,a)\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2$ $d)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2$

$e)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin(x)$ $f)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin^2(x)$ $g)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin(x^2)$

$h)$ $f:[-1,1]\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ $i)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ $j)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$k)$ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R};\ f(x)=\sqrt{x}$ $l)$ $f:(0,1)\to\mathbb{R};\ f(x)=\log(x)$ $m)$ $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R};\ f(x)=\log(x)$

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio. Probar que f es uniformemente continua si solo si $f(x)=ax+b$.

4.
   a) Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz. Probar que f es uniformemente continua. De un ejemplo de una función uniformemente continua y no Lipschitz.
   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable y acotada. Probar que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua.

5. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.
   a) Probar que $f+g$ es uniformemente continua.
   b) Discutir que ocurre para fg.
   c) Probar que $h_1=f(ax+b)$ y $h_2=af(x)+b$ son uniformemente continuas.
   d) Probar mas en general que $f\circ g$ es uniformemente continua.

6. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función uniformemente continua.
   a) Probar que existen los límites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)$, los llamaremos A y B respectibamente.
   b) Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por
   $$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in(a,b)\\ A & \text{si } x=a\\ B & \text{si } x=b\end{cases}$$
   A una función de estas caracteristicas se le llama extensión, es decir g es una extensión de f. Esta notación se debe a que la funciones g y f coinciden en el dominio de f
      1) Probar que g es uniformemente continua
      2) Deducir que g tiene extremos absolutos en $[a,b]$
   c) Probar que la función f esta acotada

7. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es uniformenente continua si solo si existen y son finitos los limites
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

3. Complementarios

1. Demuestre que no existe una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que la preimagen de cada punto tenga dos valores, es decir $\#f^{-1}(y)=2$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

2. **Distancias**
   a) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y x un numero cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es entre todos, el mas próximo a $(x,0)$; en otras palabras existe $c\in[a,b]$ tal que la distancia desde $(x,0)$ a $(c,f(c))$ es menor igual a la distancia desde $(x,0)$ a $(z,f(z))$ para todo $z\in[a,b]$.
   b) Demostrar que la afirmación es valida si se cambia $[a,b]$ por $\mathbb{R}$.