



# CONCEPTOS BÁSICOS DE LÓGICA

**Bases de Datos y Sistemas de Información**

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR

2018

# Contenido

- Motivación
- Especificación
- Lenguaje de Especificación
- Lenguaje de la Lógica de predicados
  - Valores, variables y tipos
- Variables libres y ligadas
- Valores nulos

# Motivación

- En el mundo real, las consultas a una Base de Datos se basan y se parecen mucho a la lógica de predicados.
- Un sistema informático no es otra cosa que un modelo de una parte de la realidad, típicamente de un servicio.
  - el servicio que debe proveer la biblioteca de la facultad o un banco o un supermercado, etc.
- ¿Cómo se construye típicamente este modelo?

# Especificación

- Documento que refleja el acuerdo **entre el usuario y el equipo de desarrollo** sobre lo que debe hacer o no un sistema.
- Documento que refleja el acuerdo **entre los integrantes del equipo de desarrollo** sobre qué representa cada dato y qué debe hacer cada módulo, función, etc.
- Es un modelo donde los objetos que se especificaron se comportan de forma similar a los objetos reales.
- **Si no se dispone de un mecanismo adecuado para formalizar hasta cierto punto la realidad, no es posible construir un sistema informático que la modele.**

# Lenguajes de especificación

- La especificación debe proveer lo necesario para realizar las tareas básicas que se hacen con ella:
  - Describir el problema sin ambigüedad.
  - Construir una solución adecuada del problema y con un trabajo razonable (Los objetos se comportan como los reales).
  - Verificar la solución que se construyó con respecto a la descripción.
- Dependiendo de la claridad de la definición de la sintaxis y semántica del lenguaje de especificación, ésta será más o menos formal.

# Lenguajes de especificación

- El lenguaje que se usa para construir las especificaciones debe cumplir algunas características, entre ellas:
  - Permitir la referencia a los elementos del problema.
  - Permitir la identificación de diferentes clases de elementos.
  - Poder ser utilizado en diferentes contextos o al menos diferentes problemas.
- Para especificar en informática, es necesario hacer referencia a elementos de la realidad.
  - Ejemplo: edades, personas, asignaturas, bolsas de arroz, etc.



# Lenguaje de la Lógica de Predicados

- Símbolos para denotar objetos
- Símbolos para denotar propiedades y relaciones
- Conectivos
- Cuantificadores

# Lenguaje de la Lógica de Predicados

- Símbolos para denotar objetos
  - **Símbolos de constante:** permiten referirse a objetos determinados. Representan valores que no varían a lo largo del tiempo.
    - Mafalda, 2, p
  - **Símbolos de variable:** permiten referirse a objetos genéricos. Representan valores que varían a lo largo del tiempo.
    - x, n, a
  - **Símbolos de función:** permiten referirse a operaciones (unarias, binarias, etc.)
    - $m+1$ ,  $2!$ ,  $(1+1)!$



# Valores, variables y tipos

- Un Valor es una constante individual, con un significado bien definido
  - Ejemplo: el entero 17.
- Un Valor no se puede modificar, ya que no sería el mismo Valor.
  - Ejemplo: “El peso atómico del Helio es 4,0026”
- Los Valores se codifican de alguna manera y pueden ser arbitrariamente complejos.
- Una Variable mantiene un Valor, pero puede mantener múltiples Valores a lo largo del tiempo. Las Variables sí se pueden modificar; cambiando el Valor que mantienen. Las Variables tienen nombre, lo que nos permite hablar (o predicar) sobre ellas.

# Valores, variables y tipos

- Todas las Variables tienen un Tipo
- El Tipo de una Variable es el conjunto de todos los Valores que la Variable puede mantener.
  - Ejemplos comunes de tipo: strings (cadena de caracteres), números enteros o fechas.
- Una base de datos se puede ver como una variable. En cada momento del tiempo tiene un determinado valor (de un tipo muy complejo, determinado por el esquema de la base de datos)

# Lenguaje de la Lógica de Predicados

## ■ Símbolos de predicados

- Permiten representar propiedades y relaciones entre objetos (símbolos unarios, binarios, etc.)
  - Ejemplo  $\text{Par}(2)$ : “2 es un número par”,  $\text{Par}$  es un símbolo de propiedad (unario)
  - $>$  es un símbolo de relación binario
  
- Los símbolos de predicado se aplican a objetos para representar afirmaciones simples:
  - $\text{Par}(2)$
  - $x > 1$

# Lenguaje de la Lógica de Predicados

## ■ Conectivos: Permiten combinar afirmaciones:

- Algunos conectivos: not ( $\neg$ ), entonces ( $\rightarrow$ ), sí y sólo sí ( $\leftrightarrow$ ), or ( $\vee$ ), and ( $\wedge$ )
- Ejemplo:  $\text{Par}(2) \wedge x > 1$

## ■ Cuantificadores: Cuantifican los objetos genéricos (variables)

- Cuantificador Universal (para todo):
- Cuantificador Existencial (existe):  $\exists \forall$

## ■ Ejemplos:

- $(\forall n) ((\text{Par}(n) \wedge 1 \geq n) \rightarrow n = 0)$
- $(\forall x) (\exists y) x > y$

# Tablas de Verdad

AND

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

OR

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

NOT

A	$\neg A$
V	F
F	V

# Proposiciones y Predicados

- Las proposiciones tienen un valor de verdad, que puede ser **Verdadero** o **Falso**.
- Un ejemplo de proposición es " $1 + 1 = 3$ ", la cual obviamente, es falsa...
- Un predicado, a diferencia de una proposición, admite variables de las que no se conoce su valor de verdad.
- Un ejemplo de predicado es "X aprobará Matemáticas". El valor de verdad de este predicado depende de la variable X, que varía en el conjunto de estudiantes.
- **Instanciar un predicado con valores:** Si se sustituye la variable X por el nombre "José" se obtiene una proposición.

# Proposiciones y Predicados

- Hay proposiciones, y de la misma forma predicados, que siempre son verdaderas y se llaman **tautologías**.
  - Ejemplo:  $1 = 1$  es una tautología
- Hay proposiciones, y de la misma forma predicados, que siempre son falsas y se llaman **contradicciones**.
  - Ejemplo:  $1 = 2$  es una contradicción

# Lenguaje de la Lógica de Predicados

## ■ Noción de fórmula

- La variable  $x$  es una fórmula
- La constante  $c$  es una fórmula
- Si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas, entonces
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$  es una fórmula
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  es una fórmula
  - $(\alpha \wedge \beta)$  es una fórmula
  - $(\alpha \vee \beta)$  es una fórmula
- $\neg \alpha$  es una fórmula
- $((\forall x) \alpha)$  es una fórmula
- $((\exists x) \alpha)$  es una fórmula



# Lenguaje de la Lógica de Predicados

- Atención: No confundir las siguientes fórmulas, tener en cuenta los paréntesis

- $(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta)$  y  $(\forall x) \alpha \rightarrow \beta$
- $(\exists x)(\alpha \rightarrow \beta)$  y  $(\exists x) \alpha \rightarrow \beta$

- Alcance de cuantificadores

- El alcance del cuantificador  $\forall x$  en la fórmula  $((\forall x) \alpha)$  es la fórmula  $\alpha$
- El alcance del cuantificador  $\exists x$  en la fórmula  $((\exists x) \alpha)$  es la fórmula  $\alpha$

- Ejemplos:

- $(\forall x_1) P_1(x_1) \rightarrow (\forall x_2) P_2(x_1, x_2)$
- $(\forall x_2)((\forall x_1)(P_1(x_1) \rightarrow P_2(x_1, x_2)))$

# Variables libres y ligadas

## ■ Ocurrencias libres y ligadas

- Una ocurrencia de una variable  $x$  en  $\alpha$  es ligada si se encuentra bajo alcance de un cuantificador  $(\forall x)$  o  $(\exists x)$ , o si es la variable de un cuantificador  $(\forall x)$  o  $(\exists x)$
- Si una ocurrencia de una variable  $x$  no es ligada en  $\alpha$  se dice que es una ocurrencia libre

## ■ Variables libres y ligadas

- Una variable  $x$  en  $\alpha$  es ligada si  $x$  tiene alguna ocurrencia ligada en  $\alpha$ .  
Una variable  $x$  en  $\alpha$  es libre si  $x$  tiene alguna ocurrencia libre en  $\alpha$ .

# Lenguaje de la Lógica de Predicados: Ejemplos

- El factorial de todo número es par

- $(\forall x) \text{Par}(x!)$

- La suma de dos pares es par

- $(\forall x)(\forall y) (\text{Par}(x) \wedge \text{Par}(y) \rightarrow \text{Par}(x+y))$

- Todo número natural es par o impar

- $(\forall n) (\text{Par}(n) \vee \text{Impar}(n))$

- Ningún número es a la vez par e impar

- $\neg(\exists x) (\text{Par}(x) \wedge \text{Impar}(x))$

- Todo número natural par tiene raíz cuadrada

- $(\forall n) (\text{Par}(n) \rightarrow (\exists m) m^2 = n)$

# Variables libres y ligadas: Ejemplos

- Sea  $\alpha = (\forall x_1)P_1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)P_2(x_1, x_2)$ 
  - $x_1$  tiene 2 ocurrencias ligadas en  $\alpha$ 
    - entonces  $x_1$  es ligada en  $\alpha$
  - $x_1$  tiene una ocurrencia libre en  $\alpha$ 
    - entonces  $x_1$  es libre en  $\alpha$
- Una ocurrencia de variable en una fórmula  $\alpha$  es libre o ligada
- Una variable puede ser libre y ligada en una misma fórmula

# Valores nulos

- Se admite la existencia de un valor que no es verdadero ni falso, que representa la ausencia de información, porque es desconocida (UNKNOWN) o simplemente porque no aplica. Este valor se llama NULL.
- El valor desconocido es un valor que aplica a todos los tipos de datos y es de naturaleza diferente al resto de los valores del tipo. Por ejemplo, NULL no debería ser igual al string vacío o al número entero 0 (se debería codificar de una forma diferente).