Modelado Cuantitativo para Problemas de Producción Modelado en Programación Lineal y Entera

Antonio Mauttone - Héctor Cancela
colaboran: Javier Also - Leandro Hernández - Fernando Islas - Pedro Piñeyro - Carlos Testuri

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación. Facultad de Ingeniería, UdelaR

2023

Contenido

Definición de programación lineal

Trata del modelado y resolución de problemas con variables de decisión continuas sujetas a restricciones lineales en los que se obtiene el mejor valor de cierta expresión lineal de ellas (función objetivo).

El término *programación* significa planificación. [Acepción diferente a la de programación de computadoras].

Características:

- Formulaciones directas del problema
- Conjunto de soluciones factibles reducido
- Se conoce mecanismo eficiente general de resolución: *método simplex*.

Componentes de modelo

Para establecer un modelo algebraico, a partir de un problema, se deben determinar

- los parámetros (datos),
- las variables (decisiones),
- las restricciones (sobre las decisiones), y
- el objetivo (función de las decisiones).

La determinación de variables puede tener diferentes alternativas.

Ejemplo: planificación de la producción A (texto)

Una carpintería produce escritorios, mesas y sillas a partir de la disponibilidad de madera y mano de obra especializada en carpintería y terminación. Los escritorios, las mesas y las sillas que se producen se venden todos a precios \$60, \$40 y \$15 la unidad, respectivamente. Se cuenta con los siguientes insumos disponibles y requerimientos de estos según los productos:

Insumos	Disponible	Requerimientos por producto		
		Escritorio	Mesa	Silla
Madera (m^2)	50	8	6	1
Carpintería (h)	80	2	1,5	0,5
Terminación (h)	140	4	2	1,5

El objetivo es determinar la cantidad de productos a producir que maximiza el beneficio sujeto a la disponibilidad de insumos y según los requerimientos de insumos para cada producto.

Ejemplo: planificación de la producción A (decisiones)

Por cada producto a producir se debe tomar una decisión sobre su cantidad; el plan de producción incluye las variables de decisión:

- x_E : cantidad de *escritorios* a producir
- x_M : cantidad de *mesas* a producir
- x_S : cantidad de *sillas* a producir

Ejemplo: planificación de la producción A (restricciones)

La disponibilidad de insumos es lo que limita el plan de producción.
Para cada insumo se plantean restricciones de que la cantidad de insumo usado no debe superar a la cantidad de insumo disponible:

- *Madera*
  cantidad de madera usada: $8x_E + 6x_M + x_S$
  cantidad de madera disponible: 50

$$8x_E + 6x_M + x_S \leq 50$$

- *Carpintería*: $2x_E + 1,5x_M + 0,5x_S \leq 80$
- *Terminación*: $4x_E + 2x_M + 1,5x_S \leq 140$

No negatividad de las variables de decisión:

$$x_E \geq 0, x_M \geq 0, x_S \geq 0.$$

Ejemplo: planificación de la producción A (objetivo)

El objetivo es establecer un plan de producción que maximice el beneficio. El beneficio esta dado por las ventas de los productos en términos de precios por unidad y cantidades de unidades producidas.

Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$60x_E + 40x_M + 15x_S$$

Ejemplo: planificación de la producción A (formulación)

El resumen de la formulación completa es:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 60x_E + 40x_M + 15x_S & \text{(Objetivo)} \\
\text{s.a.} & 8x_E + 6x_M + x_S \leq 50, & \text{(Madera)} \\
& 2x_E + 1,5x_M + 0,5x_S \leq 80, & \text{(Carpintería)} \\
& 4x_E + 2x_M + 1,5x_S \leq 140, & \text{(Terminación)} \\
& x_E, x_M, x_S \geq 0. & \text{(No negatividad)}
\end{array}
$$

Ejemplo: planificación de la producción B (texto)

Una carpintería produce escritorios, mesas y sillas a partir de la disposición y posible adquisición de madera y mano de obra especializada en carpintería y terminación. Se cuenta con los costos y disponibles de insumos, y requerimientos de insumos según los productos; además se cuenta con los precios unitarios de los productos y la demanda de estos a atender.

Insumos	Costo ($)	Disponible	Requerimientos por producto		
			Escritorio	Mesa	Silla
Madera (m^2)	2	50	8	6	1
Carpintería (h)	5	80	2	1,5	0,5
Terminación (h)	4	140	4	2	1,5
Demanda de productos			15	20	40
Precios de productos			$60	$40	$15

El objetivo es determinar la cant. de productos a producir que maximiza el beneficio sujeto a la disponibilidad y adquisición de insumos, la demanda y los requerimientos de insumos por producto.

Por cada producto a producir se debe tomar una decisión sobre su cantidad; el plan de producción incluye las variables de decisión:

- x_E : cantidad de *escritorios* a producir
- x_M : cantidad de *mesas* a producir
- x_S : cantidad de *sillas* a producir
- y_M : cantidad de *madera* a adquirir
- y_C : cantidad de horas de *carpintería* a adquirir
- y_T : cantidad de horas de *terminación* a adquirir

Ejemplo: planificación de la producción B (restricciones 1)

La disponibilidad de insumos puede ampliarse mediante adquisición.
Para cada insumo se plantean restricciones de que la cantidad de insumo usado no debe superar a la cantidad de insumo disponible más el adquirido:

- *Madera*
  cantidad de madera usada: $8x_E + 6x_M + x_S$
  cantidad de madera disponible y adquirida: $50 + y_M$

Ejemplo: planificación de la producción B (restricciones 1)

La disponibilidad de insumos puede ampliarse mediante adquisición.
Para cada insumo se plantean restricciones de que la cantidad de insumo usado no debe superar a la cantidad de insumo disponible más el adquirido:

- *Madera*
  cantidad de madera usada: $8x_E + 6x_M + x_S$
  cantidad de madera disponible y adquirida: $50 + y_M$

$$8x_E + 6x_M + x_S \leq 50 + y_M$$

- *Carpintería*: $2x_E + 1,5x_M + 0,5x_S \leq 80 + y_C$
- *Terminación*: $4x_E + 2x_M + 1,5x_S \leq 140 + y_T$

Ejemplo: planificación de la producción B (restricciones 2)

La cantidad de producto producida no debe superar la demanda pronosticada.

- *Escritorio*

$$x_E \leq 15$$

- *Mesa*

$$x_M \leq 20$$

- *Silla*

$$x_S \leq 40$$

No negatividad de las variables de decisión:

$$x_E \geq 0, x_M \geq 0, x_S \geq 0, y_M \geq 0, y_C \geq 0, y_T \geq 0.$$

Ejemplo: planificación de la producción B (objetivo)

El objetivo es establecer un plan de producción y adquisición que maximice el beneficio.
El beneficio esta dado por las ventas de los productos en términos de precios por unidad y cantidades de unidades producidas, menos los costos de adquisición por precios unitarios y cantidades de insumo.

Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$60x_E + 40x_M + 15x_S - 2y_M - 5y_C - 4y_T$$

Ejemplo: planificación de la producción B (formulación)

El resumen de la formulación completa es:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 60x_E + 40x_M + 15x_S - 2y_M - 5y_C - 4y_T & \text{(Objetivo)} \\
\text{s.a.} & 8x_E + 6x_M + x_S - y_M \leq 50, & \text{(Cap. Madera)} \\
& 2x_E + 1,5x_M + 0,5x_S - y_C \leq 80, & \text{(Cap. Carpintería)} \\
& 4x_E + 2x_M + 1,5x_S - y_T \leq 140, & \text{(Cap. Terminación)} \\
& x_E \leq 15, & \text{(Dem. Escritorio)} \\
& x_M \leq 20, & \text{(Dem. Mesa)} \\
& x_S \leq 40, & \text{(Dem. Silla)} \\
& x_E, x_M, x_S, y_M, y_C, y_T \geq 0. & \text{(No negatividad)}
\end{array}
$$

Parámetros

- Coeficientes de las variables en la función objetivo: c_j, $j = 1, ..., n$.
- Restricciones, con coefic. por restric., $i = 1, ..., m$: a_{ij}, $j = 1, ..., n$.
- Términos independientes por restricción: b_i, $i = 1, ..., m$.

Variables de decisión: x_j, $j = 1, ..., n$,

Formulación

$$
\begin{array}{cl}
\text{maximizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & ... \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0.
\end{array}
$$

Operador sumatoria

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n. \end{array}$$

Matricial

- Parámetros: $c = [c_j]_{j=1,\ldots,n}$, $A = [a_{ij}]_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$, $b = [b_i]_{i=1,\ldots,m}$
- Variable: $x = [x_j]_{j=1,\ldots,n}$

$$\begin{array}{rl} \max & c^{\tau} x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

(Se asume que los vectores son columnas)

Solución y valor objetivo

Solución factible: instancias de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones.

Región factible: el conjunto de todas las soluciones factibles.

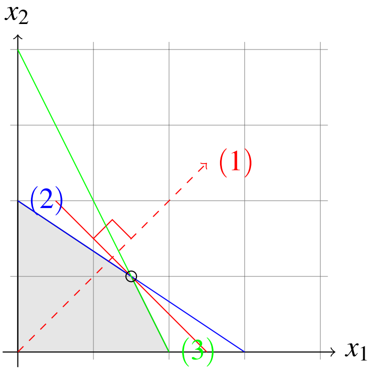
Solución óptima: solución factible que maximiza la función objetivo.

Valor óptimo: valor de la función objetivo en la solución óptima.

$$
\begin{array}{lll}
\max & x_1 + x_2 & (1) \\
\text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, & (2) \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4, & (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0, & (4).
\end{array}
$$

Solución óptima $= (1.5, 1)$

Valor óptimo $= 2.5$



Ejemplo: planificación de procesos químicos (problema)

Una planta produce a partir de procesos físico-químicos implementados en reactores. Los reactores generan productos de salida a partir de insumos de entrada, energía, etc. Los productos de salida de algunos reactores pueden ser insumos de entrada en otros reactores.

El objetivo es establecer un plan de producción que maximice el beneficio dado por las ventas de los productos.

Ejemplo: planificación de procesos químicos (procesos)

Los procesos de la planta se pueden modelar mediante un diagrama de flujo de productos entre los reactores y el medio externo.
Para cada proceso se cuenta con los requerimientos de los insumos de entrada y los de salida (proporción de formulación), el costo unitario de operación y su capacidad

Proc.	Entradas		Salidas		Costo	Cap.
P-1	M.prima (1)		Prod-A (0,6)	Prod-B (0,4)	2	3.000
P-2	Prod-A (1)		Prod-C (0,8)	Prod-D (0,2)	4	1.500
P-3	Prod-B (0,3)	Prod-C (0,7)	Prod-E (0,9)	Pérdida (0,1)	3	2.500

Ejemplo: planificación de procesos químicos (productos)

Para cada producto se cuenta con su precio unitario

Producto	Precio
Materia prima	1
Prod-A	3
Prod-B	2
Prod-C	4
Prod-D	6
Prod-E	5

Ejemplo: planificación de procesos químicos (decisiones)

En el caso de *materia prima* se debe decidir cuanto adquirir para la producción. Para algunos productos se debe decidir cuanto se utiliza como insumo, y para todos cuanto se destina a la venta.

- x_M : cantidad de *materia prima* a adquirir
- y_A, y_B, y_C : cantidad de cada producto a usar como insumo
- z_A, z_B, z_C, z_D, z_E : cantidad de cada producto a vender

Ejemplo: planificación de procesos químicos (restricciones-1)

Las restricciones deben mantener el balance de material en los procesos: lo que entra a un proceso debe coincidir con lo que sale del mismo.

- *Proceso P-1: producto A*
  salida : $y_A + z_A$
  entrada: $0,6x_M$

$$y_A + z_A = 0,6x_M$$

- *Proceso P-1: producto B*
  salida : $y_B + z_B$
  entrada: $0,4x_M$

$$y_B + z_B = 0,4x_M$$

Ejemplo: planificación de procesos químicos (restricciones-2)

Las restricciones deben mantener el balance de material en los procesos: lo que entra a un proceso debe coincidir con lo que sale del mismo.

- *Proceso P-2: producto C*
  salida : $y_C + z_C$
  entrada: $0,8y_A$

$$y_C + z_C = 0,8y_A$$

- *Proceso P-2: producto D*
  salida : z_D
  entrada: $0,2y_A$

$$z_D = 0,2y_A$$

Ejemplo: planificación de procesos químicos (restricciones-3)

Se debe mantener el balance de material en los procesos: lo que entra a un proceso debe coincidir con lo que sale del mismo.

- *Proceso P-3: producto E*
  salida : z_E
  entrada: $y_B + y_C$

$$z_E = 0,9(y_B + y_C)$$

- *Proceso P-3: relación de entrada productos B y C*

$$0,7y_B = 0,3y_C$$

Ejemplo: planificación de procesos químicos (restricciones-4)

Se debe cumplir con la capacidad de los procesos.

- *Proceso P-1*

$$x_M \leq 3.000$$

- *Proceso P-2*

$$y_A \leq 1.500$$

- *Proceso P-3*

$$y_B + y_C \leq 2.500$$

Y la no negatividad de todas las variables.

$$x_M, y_A, y_B, y_C, z_A, z_B, z_C, z_D, z_E \geq 0.$$

El objetivo es establecer un plan de producción que maximice el beneficio dado el costo de adquisición de materia prima, los costos de operación de los procesos, y el ingreso por ventas de productos.

Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$-(1+2)x_M - 4y_A - 3(y_B + y_C) + 3z_A + 2z_B + 4z_C + 6z_D + 5z_E$$

La formulación completa es:

$$
\begin{array}{lll}
\max & -3x_M - 4y_A - 3y_B - 3y_C + & \\
 & +3z_A + 2z_B + 4z_C + 6z_D + 5z_E & \\
\text{s.a.} & y_A + z_A = 0,6x_M, & \text{(Proc-1.Prod-A)} \\
 & y_B + z_B = 0,4x_M, & \text{(Proc-1.Prod-B)} \\
 & y_C + z_C = 0,8y_A, & \text{(Proc-2.Prod-C)} \\
 & z_D = 0,2y_A, & \text{(Proc-2.Prod-D)} \\
 & z_E = 0,9(y_B + y_C), & \text{(Proc-3.Prod-E)} \\
 & 0,7y_B = 0,3y_C, & \text{(Proc-3.Prods-B,C)} \\
 & x_M \leq 3.000, & \text{(Cap.Proc-1)} \\
 & y_A \leq 1.500, & \text{(Cap.Proc-2)} \\
 & y_B + y_C \leq 2.500, & \text{(Cap.Proc-3)} \\
 & x_M, y_A, y_B, y_C, z_A, z_B, z_C, z_D, z_E \geq 0. &
\end{array}
$$

Una agencia de desarrollo debe decidir como invertir el fondo de \$12 millones que dispone para financiar proyectos.

Para diversos proyectos precalificados se cuenta con información sobre el tipo de proyecto, dos evaluaciones, la duración en años y la utilidad que le da a la agencia.

Proyecto	Tipo	Eval-1	Eval-2	Duración	Utilidad
Proy-A	base	3	4	2	8
Proy-B	especial	4	3	1,5	9
Proy-C	base	5	4	2,5	8
Proy-D	especial	4	5	1,5	10
Proy-E	medio	5	4	2,5	9

Ejemplo: portafolio de proyectos (requisitos)

Se establecen los requisitos:

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,
2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los \$3 millones,
3. La duración media ponderada según inversión no debe superar los 2 años.
4. La utilidad media ponderada según inversión debe ser superior a ocho.

El objetivo es distribuir el fondo entre los proyectos de forma de maximizar la utilidad ponderada según inversión.

Ejemplo: portafolio de proyectos (decisiones)

Se debe decidir cuanto invertir en cada proyecto:

- x_A : cantidad de millones a invertir en el proyecto A
- x_B : cantidad de millones a invertir en el proyecto B
- x_C : cantidad de millones a invertir en el proyecto C
- x_D : cantidad de millones a invertir en el proyecto D
- x_E : cantidad de millones a invertir en el proyecto E

Ejemplo: portafolio de proyectos (restricciones)

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,

Ejemplo: portafolio de proyectos (restricciones)

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,

$$x_B + x_D \leq 5$$

2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los \$3 millones,

Ejemplo: portafolio de proyectos (restricciones)

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,

$$x_B + x_D \leq 5$$

2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los \$3 millones,

$$x_A + x_C \geq 3$$

3. La duración media del portafolio no debe superar los 2 años.

Ejemplo: portafolio de proyectos (restricciones)

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,

$$x_B + x_D \leq 5$$

2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los \$3 millones,

$$x_A + x_C \geq 3$$

3. La duración media del portafolio no debe superar los 2 años.

$$\frac{2x_A + 1,5x_B + 2,5x_C + 1,5x_D + 2,5x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \leq 2$$

4. La utilidad media debe ser superior a ocho.

Ejemplo: portafolio de proyectos (restricciones)

1. La inversión en proyectos especiales no puede superar los \$5 millones,

$$x_B + x_D \leq 5$$

2. La inversión en proyectos básicos debe ser superior a los \$3 millones,

$$x_A + x_C \geq 3$$

3. La duración media del portafolio no debe superar los 2 años.

$$\frac{2x_A + 1,5x_B + 2,5x_C + 1,5x_D + 2,5x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \leq 2$$

4. La utilidad media debe ser superior a ocho.

$$\frac{8x_A + 9x_B + 8x_C + 10x_D + 9x_E}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E} \geq 8$$

¿Cómo linealizar las dos últimas?

Ejemplo: portafolio de proyectos (objetivo)

El objetivo es establecer una distribución de los fondos que maximice la utilidad ponderada según la inversión

Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$8x_A + 9x_B + 8x_C + 10x_D + 9x_E$$

La formulación completa es:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 8x_A + 9x_B + 8x_C + 10x_D + 9x_E & \\
\text{s.a.} & x_B + x_D \leq 5, & \text{(Especiales)} \\
 & x_A + x_C \geq 3, & \text{(Básicos)} \\
 & -0,5x_B + 0,5x_C - 0,5x_D + 0,5x_E \leq 0, & \text{(Duración media)} \\
 & x_B + 2x_D + x_E \geq 0, & \text{(Utilidad media)} \\
 & x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \geq 0. &
\end{array}
$$

Trata del modelado y resolución de problemas con variables discretas (enteras (indivisibles) y/o binarias (decisiones)) sujetas a restricciones lineales en los que se obtiene el mejor valor de cierta expresión lineal de ellas (función objetivo).

Características:

- Formulaciones representativas y flexibles del problema
- Explosión combinatoria de soluciones factibles
- Resolución más difícil que programación lineal; no se conoce método eficiente general de resolución.

Formulación básica

- Decisión con dos alternativas (binaria): $x \in \{0, 1\}$
- Decisión con múltiples alternativas: $x \in \{1, 2, 3, ...\}$
- Decisiones binarias dependientes. La decisión x puede tomarse ($x = 1$) solo si la decisión y ya ha sido tomada ($y = 1$): $x \leq y$
- Decisiones binarias excluyentes: $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} y_i \leq 2$
- Decisiones binarias inclusivas: $\sum_{i=1}^{n} y_i \geq 3$

Ejemplo: formulación básica

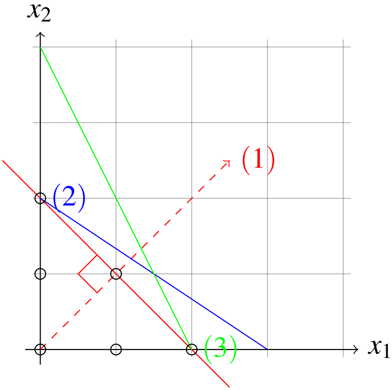
Dados ciertos cursos, identificados por $i = 1, ..., 5$, se requiere modelar las siguientes decisiones sobre elección para cursarlos mediante las variables binarias y_i

- Elegir al menos uno de los cursos: $\sum_{i=1}^{5} y_i \geq 1$
- ¿Elegir a lo sumo cuatro de ellos?
- Si se elige el curso 2, se debe elegir el curso 5: $y_2 \leq y_5$
- ¿Si se elige el curso 1, no se debe elegir el curso 3?
- ¿Se deben elegir los cursos 4 y 5 o ninguno de ellos?

Ejemplo: formulación básica y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & x_1 + x_2 & (1) \\
\text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, & (2) \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4, & (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras} & (4).
\end{array}
$$

Soluciones óptimas $=$
$\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$
Valor óptimo $= 2$



Ejemplo: problema del mochilero

Existe la posibilidad de transportar $i = 1, ..., n$ objetos de valor c_i y tamaño a_i en una mochila de capacidad b. Se desea saber cuales objetos llevar de forma de maximizar el valor de lo transportado en la mochila.

Existe la posibilidad de transportar $i = 1, ..., n$ objetos de valor c_i y tamaño a_i en una mochila de capacidad b. Se desea saber cuales objetos llevar de forma de maximizar el valor de lo transportado en la mochila.

Variables
$x_i = 1$ si el objeto i es transportado, y $x_i = 0$ en caso contrario.

Ejemplo: problema del mochilero

Existe la posibilidad de transportar $i = 1, ..., n$ objetos de valor c_i y tamaño a_i en una mochila de capacidad b. Se desea saber cuales objetos llevar de forma de maximizar el valor de lo transportado en la mochila.

Variables
$x_i = 1$ si el objeto i es transportado, y $x_i = 0$ en caso contrario.

Restricciones
No se puede exceder la capacidad: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$.
Variables binarias: $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n$.

Ejemplo: problema del mochilero

Existe la posibilidad de transportar $i = 1, ..., n$ objetos de valor c_i y tamaño a_i en una mochila de capacidad b. Se desea saber cuales objetos llevar de forma de maximizar el valor de lo transportado en la mochila.

Variables
$x_i = 1$ si el objeto i es transportado, y $x_i = 0$ en caso contrario.

Restricciones
No se puede exceder la capacidad: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$.
Variables binarias: $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n$.

Función objetivo:
maximizar el valor de lo transportado: $\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Ejemplo: determinación de turnos (problema)

Una institución tiene que determinar el personal necesario para cubrir turnos de servicio semanales.
Para cada día de la semana, $i = 1, ..., 7$, se requiere que cierta cantidad, d_i, de funcionarios esté de turno prestando servicio.
Cada funcionario trabaja 5 días seguidos.

El objetivo es determinar la cantidad mínima de funcionarios que se necesitan.

Ejemplo: determinación de turnos (problema)

Una institución tiene que determinar el personal necesario para cubrir turnos de servicio semanales.
Para cada día de la semana, $i = 1, ..., 7$, se requiere que cierta cantidad, d_i, de funcionarios esté de turno prestando servicio.
Cada funcionario trabaja 5 días seguidos.

El objetivo es determinar la cantidad mínima de funcionarios que se necesitan.

¿Cómo modelar las decisiones?

Ejemplo: determinación de turnos (decisiones)

Una alternativa es decidir la cantidad de funcionarios que trabajan cada día.
¿Cómo modelamos que cada funcionario trabaje 5 días seguidos?

Ejemplo: determinación de turnos (decisiones)

Una alternativa es decidir la cantidad de funcionarios que trabajan cada día.
¿Cómo modelamos que cada funcionario trabaje 5 días seguidos?

Otra opción es decidir la cantidad de funcionarios que comienzan a trabajar cada día; es decir, el comienzo del turno.
Un funcionario que comienza su turno el día 4 trabajará los días $4, 5, 6, 7$, y 1.
Entonces, sea x_i la cantidad de funcionarios que comienzan en turno en el día i.
¿Cómo modelar la cantidad necesaria de funcionarios por día?

Ejemplo: determinación de turnos (restricciones)

La cantidad de funcionarios que se necesitan para el primer día (la suma de los funcionarios que comienzan a trabajar en los turnos $1, 4, 5, 6, 7$) debe cubrir la demanda, d_1:

$$x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_1$$

En forma similar se debe cubrir la demanda de los días $2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 + x_7 &\geq d_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 + x_7 &\geq d_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_7 &\geq d_4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad\qquad &\geq d_5 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \qquad &\geq d_6 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq d_7.
\end{aligned}$$

La función objetivo junto a la formulación completa es

$$
\begin{array}{rl}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{s.a.} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_1 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq d_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq d_4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq d_5 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq d_6 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_7. \\
& x_i \geq 0, \text{entera}, \quad i = 1, ..., 7.
\end{array}
$$

Dados los parámetros: matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y los vectores columnas $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$ y la variable de decisión: vector columna $x \in \mathbb{Z}^n$.

Caso variables enteras (IP: integer program),

$$\begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \text{ entero.} \end{array}$$

Caso variables binarias (BIP: binary integer program),

$$\begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{array}$$

Problema de programación (lineal) entera mixta

Dados, además, los parámetros: matriz $E \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y vector columna $d \in \mathbb{R}^p$, y la variable de decisión: vector columna $y \in \mathbb{R}^p$.

Caso variables enteras y reales (MIP: mixed integer program).

$$\begin{array}{rl} \max & c^\tau x + d^\tau y \\ \text{s.a.} & Ax + Ey \leq b \\ & x \geq 0, \text{entero}; y \geq 0. \end{array}$$

Ejemplo: problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona. Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.
El objetivo es establecer la asignación de costo mínimo.

Ejemplo: problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona. Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.
El objetivo es establecer la asignación de costo mínimo.

Variable de decisión:
$x_{ij} = 1$ si a la persona i se le asigna la tarea j, y $x_{ij} = 0$ en otro caso.

Ejemplo: problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona. Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.
El objetivo es establecer la asignación de costo mínimo.

Variable de decisión:
$x_{ij} = 1$ si a la persona i se le asigna la tarea j, y $x_{ij} = 0$ en otro caso.

Función objetivo:
minimizar el costo de la asignación: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$.

Ejemplo: problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona. Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.
El objetivo es establecer la asignación de costo mínimo.

Variable de decisión:
$x_{ij} = 1$ si a la persona i se le asigna la tarea j, y $x_{ij} = 0$ en otro caso.

Función objetivo:
minimizar el costo de la asignación: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Restricciones:
cada persona realiza una tarea: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., n,$
cada tarea es realizada por una persona: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, ..., n,$
variables binarias: $x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., n; j = 1, ..., n.$

Ejemplo: problema de transporte

Sean m proveedores y n clientes de un producto. El proveedor i puede suministrar s_i unidades y el cliente j demanda d_j unidades. Al transportar del proveedor i al cliente j se incurre en un costo unitario c_{ij}.
Se asume que el total suministrado y demandado coincide. El problema consiste en transportar a costo mínimo el producto desde los proveedores a los clientes.

Ejemplo: problema de transporte

Sean m proveedores y n clientes de un producto. El proveedor i puede suministrar s_i unidades y el cliente j demanda d_j unidades. Al transportar del proveedor i al cliente j se incurre en un costo unitario c_{ij}.
Se asume que el total suministrado y demandado coincide. El problema consiste en transportar a costo mínimo el producto desde los proveedores a los clientes.
Variable de decisión:
x_{ij} cantidad de unidades de producto a transportar del proveedor i al cliente j.

Ejemplo: problema de transporte

Sean m proveedores y n clientes de un producto. El proveedor i puede suministrar s_i unidades y el cliente j demanda d_j unidades. Al transportar del proveedor i al cliente j se incurre en un costo unitario c_{ij}.
Se asume que el total suministrado y demandado coincide. El problema consiste en transportar a costo mínimo el producto desde los proveedores a los clientes.
Variable de decisión:
x_{ij} cantidad de unidades de producto a transportar del proveedor i al cliente j.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, ..., n & \text{(Cada cliente demanda } d_j\text{)} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, ..., m & \text{(Cada proveedor suministra } s_j\text{)} \\
& x_{ij} \geq 0, \; i = 1, ..., m; j = 1, ..., n & \text{(Dominio)}
\end{array}
$$

El *problema de asignación* es un caso particular de este, en donde la cantidad de proveedores y clientes coinciden, y todos tienen una única unidad de suministro/demanda.

Una empresa puede abrir plantas en ciertos lugares $j = 1, ..., n$ que operarían con costos fijo f_j para atender la demanda de un producto por parte de sus clientes $i = 1, ..., m$.
Cada cliente puede ser suministrado, desde las plantas que se decide abrir, a un costo de transporte c_{ij} por toda su demanda.
Se busca determinar que plantas se abren y desde cuales de estas se atiende cada cliente de forma de minimizar los costos fijos y de transporte.

Uncapacitated Facility Location problem (UFL)

Localización de instalación no-capacitada (modelo)

Variables de decisión:

Localización de instalación no-capacitada (modelo)

Variables de decisión:
- determinación de uso de la planta j:
  $y_j = 1$ si se usa la planta j, $y_j = 0$ en otro caso, con $j = 1, ..., n$.
- fracción de demanda del cliente i atendida por la planta j:
  $x_{ij} \in [0, 1]$ con $i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$

Restricciones:

Variables de decisión:

- determinación de uso de la planta j:
  $y_j = 1$ si se usa la planta j, $y_j = 0$ en otro caso, con $j = 1, ..., n$.
- fracción de demanda del cliente i atendida por la planta j:
  $x_{ij} \in [0, 1]$ con $i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$

Restricciones:

- atención a la demanda de los clientes:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m.$$

- activación del uso de las plantas:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Función objetivo:

Localización de instalación no-capacitada (modelo)

Variables de decisión:

- determinación de uso de la planta j:

  $y_j = 1$ si se usa la planta j, $y_j = 0$ en otro caso, con $j = 1, ..., n$.

- fracción de demanda del cliente i atendida por la planta j:

  $x_{ij} \in [0, 1]$ con $i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$

Restricciones:

- atención a la demanda de los clientes:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m.$$

- activación del uso de las plantas:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Función objetivo:

- minimizar el costo: $\min \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$.

Determinación de lotes no-capacitada (problema)

Consiste en decidir un plan de producción de un producto durante $t = 1, ..., n$ períodos que minimice los costos totales.

Parámetros:

- f_t es el costo fijo de producir en el período t,
- p_t es el costo unitario de producción en el período t,
- h_t es el costo unitario de almacenamiento en el período t,
- d_t es la demanda en el período t.

Variables de decisión:

- x_t es la cantidad producida en el período t,
- s_t es el inventario al final del período t,
- $y_t = 1$ si se produce en el período t, $y_t = 0$ en otro caso.

Uncapacitated Lot-Sizing problem (ULS)

Restricciones
- balance del producto según períodos:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, ..., n$$

$$\text{donde } s_0 = 0$$

- activación de producción
Dado que no hay una cota de producción se asume un valor grande M para la activación de los costos fijos

$$x_t \leq My_t, \qquad t = 1, ..., n$$

La función objetivo junto a la formulación completa es

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t \\
\text{s.a.} & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, ..., n, \\
& x_t \leq M y_t, \qquad\qquad t = 1, ..., n, \\
& s_0 = 0, s_t \geq 0, x_t \geq 0, y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, ..., n.
\end{array}
$$

Sea C_t la capacidad de producción en el período t.
Se tiene la formulación

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t \\
\text{s.a.} & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, ..., n, \\
& x_t \leq C_t y_t, \qquad t = 1, ..., n, \\
& s_0 = 0, s_t \geq 0, x_t \geq 0, y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, ..., n.
\end{array}
$$

Observación

No existe resolución polinomial, la versión capacitada es $NP - hard$.

Determinación de lotes capacitada con atraso (formulación)

Sean
- b_t el costo unitario por atraso en el período t,
- r_t la cantidad del producto que se atrasa al final del período t;
se asume que $r_0 = 0$

Sean
- b_t el costo unitario por atraso en el período t,
- r_t la cantidad del producto que se atrasa al final del período t;
se asume que $r_0 = 0$

Se tiene la formulación

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t + \sum_{t=1}^{n} b_t r_t \\ \text{s.a.} & s_{t-1} + x_t - r_{t-1} = d_t + s_t - r_t, \quad t = 1, \ldots, n, \\ & x_t \leq C_t y_t, \qquad t = 1, \ldots, n, \\ & s_0 = 0, r_0 = 0, \\ & s_t \geq 0, x_t \geq 0, y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \ldots, n, \\ & r_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Determinación de lotes capacitada con costos de restablecimiento (formulación)

Sean
- g_t el costo por restablecer la producción en el período t,
- $z_t = 1$ si se restablece la producción en el período t, $z_t = 0$ en otro caso.

Se tiene la formulación

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t + \sum_{t=1}^{n} g_t z_t \\
\text{s.a.} & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, \ldots, n, \\
& x_t \leq C_t y_t, \quad t = 1, \ldots, n, \\
& z_t \leq y_t, \quad t = 1, \ldots, n, \\
& z_t \leq 1 - y_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, n, \\
& y_t - y_{t-1} \leq z_t, \quad t = 1, \ldots, n, \\
& s_0 = 0, s_t \geq 0, x_t \geq 0, \quad y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \ldots, n, \\
& z_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Un productor debe decidir las cantidades a cultivar de ciertos productos y, dependiendo de los rendimientos, las cantidades a vender o comprar de forma tal de maximizar su ingreso total mientras cumple ciertos requerimientos. Dispone de una superficie de tierra para cultivar de 500 hectáreas.

	Trigo	Maíz	Remolacha
Rendimiento (T/ha)	2,5	3	20
Costo plantar ($/ha)	150	230	260
Precio venta($/T)	170	150	36
Precio compra ($/T)	238	150	210
Requisito mínimo (T)	200	240	

Ejercicio: Producción agrícola (variación)

Un productor debe decidir las cantidades a cultivar de ciertos productos y, dependiendo de los rendimientos, las cantidades a vender o comprar de forma tal de maximizar su ingreso total mientras cumple ciertos requerimientos.

	Trigo	Maíz	Remolacha
Rendimiento (T/ha)	2,5	3	20
Costo plantar ($/ha)	150	230	260
Precio venta($/T)	170	150	36 (<= 6.000 T)
			10 (> 6.000 T)
Precio compra ($/T)	238	150	210
Requisito mínimo (T)	200	240	

A partir de 6.000 T la remolacha se vende a un precio inferior.

Ejercicio: Mudanza

Una estudiante está planeando mudarse a su nuevo apartamento.
Ella tiene que mudar n objetos de tamaño $a_j, j = 1, ..., n$. Para la mudanza contrató un camión de capacidad Q y consiguió m cajas de capacidad b_i, $i = 1, ..., m$; ya que desea llevar todo empaquetado. Formular un modelo de programación entera para ayudar a la estudiante decidir si la mudanza es posible en dichas condiciones.
¿Qué objetivos se podrían establecer?

Ejercicio: Determinación de lotes capacitada con múltiples productos

Dado el problema básico de determinación de lotes capacitada, se requiere modelar la variación del problema en el que hay multiples productos, identificados con $p = 1, ..., m$,y con capacidad de producción C_p para cada uno de ellos; además, sólo se dispone de equipamiento con capacidad, C para todos los productos en cada período.