Práctico 3

1. Esbozar un diagrama de fase para las siguientes ecuaciones:

   a) $\dot{y} = y^2$ *b*) $\dot{y} = -y^2$ *c*) $\dot{y} = y^2 - 1$ *d*) $\dot{y} = \operatorname{sen}(y)$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (1, 1)$ *b*) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3z \\ \dot{y} = -8x + y + 11z \\ \dot{z} = -2x + 4z \end{cases}$

3. Para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales encontrar la solución general y dibujar el diagrama de fase:

   a) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$

   d) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ *e*) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = x \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z \end{cases}$

4. *a*) Se considera el sistema:

   $$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

   i) Probar que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es solución de la ecuación entonces $x^2(t) + y^2(t) = cte$.

   ii) A partir de i), dibujar el diagrama de fase.

   b) A partir de la parte *a*), dibujar el diagrama de fase del sistema lineal:

   $$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

5. Encontrar la solución general del sistema lineal

   $$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \alpha y \end{cases}$$

   donde α es una constante real. Hacer un esquema del diagrama de fase para los valores $\alpha = -1, 0, 1$.

   > **Observar**: la estructura cualitativa del diagrama de fase es la misma para todos los valores $\alpha < 0$, así como para todos los $\alpha > 0$, sin embargo cambia en el parámetro $\alpha = 0$.

6. Sea A una matriz 2×2, con valores propios reales λ y μ diferentes. Supongamos que $(0, 1)$ y $(-1, 1)$ son vectores propios asociados a los valores propios λ y μ respectivamente. Bosquejar el diagrama de fase de la ecuación $\dot{X} = AX$ para los siguientes casos:

a) $0 < \lambda < \mu$ b) $0 < \mu < \lambda$ c) $\lambda < \mu < 0$

d) $\lambda < 0 < \mu$ e) $\mu < 0 < \lambda$ f) $0 = \lambda, \mu > 0$

7. Hallar la solución general y dibujar el diagrama de fase de la ecuación $\dot{X} = AX$ para los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ k) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ l) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

8. Encontrar los valores y vectores propios de la matriz A, resolver el sistema $\dot{X} = AX$ y obtener un esquema del diagrama de fase para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Escribir las siguientes ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes en la forma $\dot{X} = AX$, y resolver:

a) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ b) $\ddot{x} + x = 0$ c) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

10. Hallar la matriz e^{At} para las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

11. a) Probar que si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ entonces $e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \mathrm{sen}(\beta t) \\ -\mathrm{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$.

> **Nota:** para probar esta parte vamos a admitir el siguiente resultado:
> Si A y B son dos matrices tales que $A.B = B.A$ entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

b) Probar que si $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tiene un valor propio complejo $\lambda = \alpha + i\beta$ entonces existe una matriz invertible P tal que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = PAP^{-1}$.

c) A partir de a) y b), hallar e^{At} para una matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tiene un valor propio complejo.

12. Encontrar la solución general del sistema

$$\dot{X} = AX$$

cuando A es una matriz diagonal $n \times n$. ¿Qué condición debe cumplir A para que todas las soluciones cumplan que $\lim_{t \to +\infty} X(t) = \vec{0}$?

13. *a*) Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y un vector $B \in \mathbb{R}^n$, probar que si α no es valor propio de A entonces la ecuación $\dot{X} = AX + e^{\alpha t}B$ tiene una única solución de la forma $X(t) = e^{\alpha t}U$ con $U \in \mathbb{R}^n$. Calcular U en función de A, B y α.

    b) Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y + e^{2t} \\ \dot{y} &= x + 2y - e^{2t} \end{aligned}$$

14. Se considera la ecuación lineal

$$\dot{X} = AX$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se definen

$$E^s = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)<0} E_\lambda; \quad E^c = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)=0} E_\lambda; \quad E^u = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)>0} E_\lambda$$

los espacios estable, central e inestable respectivamente, donde E_λ es el subespacio propio generalizado asociado al valor propio λ.

> **Recordar:** si λ es un valor propio con multiplicidad algebraica m, el subespacio propio generalizado se define como $E_\lambda = \ker\left[(A - \lambda I)^m\right]$. $\oplus$ representa la suma directa de espacios vectoriales.

a) Demostrar que los espacios E_λ son invariantes por A.

b) Mostrar que si φ es una solución tal que $\varphi(0) = x_0 \in E_\lambda$ entonces $\varphi(t) \in E_\lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) Encontrar E^s, E^c, E^u y bosquejar los diagramas de fase para la ecuación $\dot{X} = AX$ en los siguientes casos:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(7) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$