Práctico 2

Definición y notación: Se recuerda la definición de transformada de Laplace, como integral paramétrica de parámetro complejo s, integrando en la variable real $t \geq 0$:

$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt.$$

Se asume, por convención, que toda función Laplace transformable satisface: $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.
Durante todo el práctico se usarán las siguientes notaciones:

- $H(t)$ denota el "escalón de Heaviside" definido como:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

- $\mathcal{L}f$ o $(\mathcal{L}f)(s)$ o $F(s)$ denota la transformada de Laplace de la función $f(t)$.

1. Encontrar la transformada de Laplace de $H(t)$.

2. *a*) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s-\alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama "propiedad de traslación en frecuencia".

   b) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s) \cdot e^{-as}$ es la transformada de $f(t-a)$, donde a es un número real fijo , y $f(t) = 0$ para todo real $t < 0$ y también para todo $t < a$. Este resultado se llama "propiedad de traslación en el tiempo".

   c) Usando las partes *a*) y *b*) y la linealidad de la transformada de Laplace, calcular la transformada de:
   $$f(t) = H(t)\operatorname{senh}(at) = H(t)\,\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}.$$

   d) Dada una función f, probar que la transformada de Laplace de su derivada $f'(t)$ satisface la identidad:
   $$(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}(f))(s) \;-\; f(0).$$

   e) Usando las partes *c*) y *d*) encontrar la transformada de Laplace de:
   $$\frac{1}{a} \cdot (H(t)\operatorname{senh}(at))' = H(t)\cosh(at) = H(t)\,\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

   f) Admitiendo que la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es derivable como función de variable s, y que al derivar respecto a s la integral impropia que define $F(s)$ es igual a la integral impropia de la función que se obtiene derivando dentro de la integral, deducir que:
   $$F'(s) = (\mathcal{L}[-tf(t)])(s)$$

g) Usando las partes *a*) y *f*) encontrar la transformada de $f(t) = H(t)e^{2t}\, t^2$.

3. Construir una tabla de Transformadas de Laplace, en que a cada una de las funciones que se listan a continuación se le asigne su transformada de Laplace $F(s)$.

> **Nota:** las funciones están definidas por las fórmulas que siguen para $t \geq 0$, y cumplen $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

a) $H(t)$

b) $e^{\alpha t}$

c) $\cosh(\alpha t) = \dfrac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$

d) $\operatorname{senh}(\alpha t) = \dfrac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$

e) $\cos(\alpha t) = \dfrac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2}$

f) $\operatorname{sen}(\alpha t) = \dfrac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i}$

g) $e^{\alpha t} t$

h) $e^{\alpha t} t^2$

i) $e^{\alpha t} t^n$

j) $t^n \operatorname{sen}(\alpha t)$

k) $H(t - \alpha)$ para $\alpha > 0$ constante.

l) $P_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon}(H(t) - H(t - \epsilon))$ (para $\epsilon > 0$ muy pequeño).

4. *a*) Graficar la función $P_\epsilon(t)$ del ejercicio anterior, parte *l*), con $\epsilon = 1/10^6$.
Esa función se llama "pulso" de duración ϵ y altura $1/\epsilon$. Su límite cuando $\epsilon \to 0^+$ no existe como función, ya que sería un pulso de duración nula y altura infinita. Aunque no exista como función se llama "Distribución Delta de Dirac", y se denota así:

$$\delta(t) = \text{“}\lim_{\epsilon \to 0^+}\text{”}\ P_\epsilon(t).$$

b) Se define la transformada de Laplace de la Delta de Dirac como el límite (este sí existe) siguiente:

$$(\mathcal{L}\delta)(p) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (\mathcal{L}(P_\epsilon(t))(p)$$

Hallar la transformada de Laplace de la Delta de Dirac y agregarla a la tabla del ejercicio anterior.

c) Se definen, para el número real $a > 0$ fijo, la distribución

$$\delta(t - a) = \text{“}\lim_{\epsilon \to 0^+}\text{”} P_\epsilon(t - a)$$

y la transformada de Laplace de $\delta(t - a)$ como el $\lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{L}[P_\epsilon(t - a)]$. Hallar $(\mathcal{L}[\delta(t - a)])(p)$ y agregarla a la tabla. Comparar el resultado obtenido con la propiedad de traslación en el tiempo.

5. Usar la siguiente fórmula de la transformada de Laplace de una función períodica $f(t)$ con período c:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-cs}} \int_0^c f(t) e^{-st} dt,$$

para encontrar la transformada de *la onda semi-rectificada* :

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } \operatorname{sen} t > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{sen} t \leq 0 \end{cases}$$

Graficar la onda semi-rectificada en función del tiempo.

> **Nota:** Esta es la forma de una corriente alterna (i.e. sinusoidal) después de pasar por un diodo.

6. *a)* Llamando $F(s)$ a la transformada de Laplace de la función $f(t)$, tomar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial siguiente, y expresarla en función de $F(s)$:

$$2\frac{df}{dt} = 1 \qquad \text{con condición inicial} \quad f(0) = 4.$$

> **Sugerencia:** Usar la parte *b)* del ejercicio 2. Recordar que la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1 \ \forall t \geq 0$ coincide con la transformada del escalón de Heaviside $H(t)$.

b) Resolver por el método de transformada de Laplace la ecuación diferencial de la parte *a)*.

> **Nota:** El método de transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales consiste en usar la igualdad obtenida en la parte *a)* para despejar la transformada $F(s)$ de $f(t)$. Luego, basándose en la tabla construida en el ejercicio 3, y en la linealidad de la Transformada de Laplace, hallar $f(t)$.

7. Resolver, usando el método de la transformada de Laplace, las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $f'' - 4f' + 3f = 1$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

b) $f'' - 4f' + 3f = 2e^t$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

> **Nota:** En este ejemplo aparece un factor repetido en el cociente; en ese caso, la fracción simple tiene la forma:
>
> $$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-b}.$$

c) $f'' - 4f' + 3f = 0$ con condiciones iniciales $f(0) = 1$ and $f'(0) = 1$.

d) $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$ con condiciones iniciales $y'(0) = 1$ e $y(0) = 0$, donde a es una constante real.

e) $f'' + 2f' - 3f = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

f) $f'' + 2f' - 3f = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

g) $f'' + 2f' - 3f = \delta(t-1)$ con condiciones iniciales $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

> **Nota:** Recordar que $(\mathcal{L}[\delta(t-a)])(s) = e^{-as}$.

8. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} + 3x - y = u(t) \\ \dot{y} - 2y = 2u(t) \end{cases}$$

Hallar la transferencia del sistema con entrada $u(t)$ y salida $x(t)$.

Notas: La transferencia de un sistema lineal se define como el cociente $\frac{X(s)}{U(s)}$ donde $X(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de x y u, respectivamente. Para hallar la transferencia, por convención, las condiciones iniciales han de ser nulas.

9. Usando Transformada de Laplace, encontrar la convolución $(f * g)(t)$ para:

a) $f(t) = t$, $g(t) = e^{2t}$.
b) $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = e^{-t}$.

Recordar: se asume, por convención, que toda función Laplace transformable satisface $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.