Solución

Problema 1

1. Ver teórico.

2. Ver teórico.

3. En primer lugar veamos que $1 \leqslant a_n$ para todo n. Lo demostraremos usando el método de inducción completa.

   - *Paso base*: $1 \leqslant a_1 = 2$
   - *Paso inductivo*:
     - Hipótesis: $1 \leqslant a_n$
     - Tesis: $1 \leqslant a_{n+1}$

   $$1 \leqslant a_{n+1} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}a_n \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}a_n \Leftrightarrow 1 \leqslant a_n.$$

   En segundo lugar, veamos que a_n es monótona decreciente, es decir que $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo n.

   $$a_{n+1} \leqslant a_n \Leftrightarrow \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4} \leqslant a_n \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leqslant \frac{3}{4}a_n \Leftrightarrow 1 \leqslant a_n.$$

   Como ya probamos que $1 \leqslant a_n$ para todo n se concluye que $a_{n+1} \leqslant a_n$ como queríamos. Finalmente, como a_n es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente, por la parte (2) se deduce que a_n tiene límite L. Luego L debe verificar que

   $$L = \frac{1}{4}L + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}L = \frac{3}{4} \Leftrightarrow L = 1.$$

Problema 2

- Como $\lim_n e^{a_n} = e^0 = 1 \neq 0$ se deduce que $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{a_n}$ no es convergente. Además por ser una serie de términos positivos tampoco oscila. Por lo tanto la serie diverge.

- Como $a_n \geqslant 0$ para todo n, el $\lim_n a_n = 0$ y a_n es monótona decreciente, por el Criterio de Leibnitz para series alternadas se deduce que $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ es no convergente.

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} - a_n$ es telescópica, por lo tanto es convergente si y solo si a_n es convergente, y en tal caso $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} - a_n = \lim_n a_n - a_1$. Como en este caso $\lim_n a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} - a_n$ converge a $0 - a_1 = -\frac{1}{2}$.

- Aplicando raíz enésima en ambos lados de la desigualdad $\frac{1}{2n} \leqslant a_n$, obtenemos que $\frac{1}{2n^{\frac{1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{a_n}$. Como $\lim_n \frac{1}{2n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$ se deduce que $\frac{1}{2} \leqslant \lim_n \sqrt[n]{a_n}$ y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ no converge. Además por tratarse de una serie de términos positivos, podemos concluir que la serie diverge.

Problema 3

1. El dominio es: $(-1,1)$. Es continua por ser composición de funciones continuas.
2. $f'(x) = \frac{x}{x^2-1}$, 0 es máximo relativo y absoluto y no tiene mínimos relativos.
3. $$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt = \lim_{a\to -1} \int_{a}^{0} f(t)dt + \lim_{b\to 1} \int_{0}^{b} f(t)dt$$
   Por otra parte, se tiene que:
   $$\int f(t)dt = \frac{1}{2}\, x\log\left(-x^2+1\right) - x + \frac{1}{2}\,\log\left(|x+1|\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(|x-1|\right)$$
   Sustituyendo y resolviendo los límites correspondientes finalmente se obtiene que: $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 2log(2) - 2$
4. El polinomio de taylor de orden 4 de f en 0 es: $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$.

Problema 4

1. Usando la fórmula de Bhaskara tenemos que
   $$x = \frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1 \pm i$$
2. Para hallar A, como $\alpha = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ entonces si $z = \rho e^{i\theta} \in A$ debe verificar que $\rho^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y por lo tanto debe ser $\rho = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2K\pi}{3}$ para $K = 0,1,2$. Resulta entonces que
   $$A = \{(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{12}}, (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}}, (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}}\}.$$
   De igual forma, para hallar B, como $\beta = 1-i$ entonces si $z \in B$ debe verificar que $\rho^4 e^{i4\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ y por lo tanto debe ser $\rho = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} =$ y $\theta = \dfrac{-\pi}{16} + \dfrac{K\pi}{2}$ para $K = 0,1,2,3$. Resulta entonces que
   $$B = \{(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\pi}{16}}, (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\pi}{16}+\frac{\pi}{2}}, (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\pi}{16}+\pi}, (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}}\}.$$