Universidad de la República **Cálculo I**

Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

Examen – Martes 19 de diciembre de 2017

Nro examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 100 puntos.
- La duración del parcial es tres horas y media.

Ejercicio 1: (15 puntos)

a) Dado $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ pruebe la siguiente identidad $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - 2Re(\alpha)z + \mid \alpha \mid^2 .$$

b) Halle las raíces del siguiente polinomio y dibújelas en el plano complejo:

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z$$

¿Forman un triángulo equilátero? Justifique

Ejercicio 2: (15 puntos)

a) Pruebe que si una sucesión c_n esta acotada y otra b_n tiende a cero entonces $lim_{n\to\infty} c_n b_n = 0$.

b) Considere la sucesión:

$$a_n = \frac{sen(n)}{3n^2}$$

i) Halle $lim_{n\to+\infty} a_n$

ii) Clasifique la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Ejercicio 3: (25 puntos)

1. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con derivada continua y F una primitiva de f.
   i) Pruebe la fórmula de sustitución para primitivas:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

   ii) Deduzca la fórmula de sustitución para integrales definidas:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

   iii) Halle la siguiente integral definida:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{tg(x)} dx$$

2. Halle la siguiente primitiva con el método que le resulte más conveniente.

$$\int log(x)x^3 dx.$$

Ejercicio 4: (20 puntos)

a) Escriba la fórmula general de $P_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de grado n de una función f alrededor del punto a.
b) Halle $P_3(log(x^2+1),0)$.
c) Calcule el siguiente límite:

$$lim_{x\to 0}\frac{log(1+x^2)-x^2}{x^3}.$$

Justifique.

Ejercicio 5: (25 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función.

a) Defina máximo y mínimo relativo de f.
b) Pruebe que si f es derivable y tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a)=0$.
c) Pruebe que la siguiente ecuación tiene una única solución:

$$sen(x)+3=2x$$