Universidad de la República
Facultad de Ingenieria
IMERL

Curso Cálculo 1 anual
2015

Examen 18 de diciembre 2015

Es importante JUSTIFICAR TODAS las respuestas. El examen se aprueba con **un problema y medio correctos (es necesario que uno de los tres problemas esté correcto en su totalidad)**.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   (a) Probar que F es derivable y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Teorema Fundamental del Cálculo).
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$.
      (i) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de F en $x = 0$.
      (ii) Calcular
      $$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - x}{x^3}.$$
      (iii) Clasificar la integral impropia
      $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$
      (iv) Clasificar la serie
      $$\sum F(1/n^2).$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   (a) Demostrar que f es continua y derivable. Calcular $f'(x)$.
   (b) Clasificar la integral impropia
   $$\int_0^1 f(x)dx.$$
   (Sug: Realizar el cambio de variable $u = 1/x$)
   (c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que si f es continua entonces la preimagen de un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es cerrada en $\mathbb{R}$.
   (d) Sea Z_f el conjunto de las raíces de f. Estudiar si Z_f es abierto y/o cerrado.

3. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(x-1)e^{-\cos(x-1)}, & x \in [0, 1] \\ (\ln x)^2, & x > 1 \end{cases}$$
   (a) Estudiar continuidad de f.
   (b) Estudiar continuidad uniforme de f.
   (c) Calcular
   $$\int_0^1 f(x)dx, \quad \int_1^3 f(x)dx.$$