Universidad de la República **Cálculo I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

PRIMER PARCIAL – JUEVES 4 DE MAYO DE 2017

Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 15 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

(I) Verdadero Falso. Total: 2 puntos

Puntajes: $\frac{1}{2}$ punto si la respuesta es correcta, $\frac{-1}{2}$ punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
V	V	F	F

Ejercicio 1: Dados dos conjuntos A y B tales que $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Ejercicio 2: Si un conjunto no vacío S está acotado superiormente entonces $-S = \{-x : x \in S\}$ está acotado inferiormente.

Ejercicio 3: Si una función no es inyectiva entonces es sobreyectiva.

Ejercicio 4: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es inyectiva.

(II) Negar las siguientes afirmaciones. Total: 1 punto

1. Todos los hombres viven menos de 100 años.

   Existe algún hombre que vivió o vivirá 100 años o más.

2. Ninguna bicicleta tiene tres ruedas.

   Existe alguna bicicleta con tres ruedas.

(III) Desarrollo. Total: 12 puntos

Ejercicio 1: (4 puntos)

Demuestre la siguiente desigualdad utilizando inducción completa:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\, x > -1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Paso base: $n = 0$
$(1+x)^0 \geq 1 + 0x$
$1 = 1$

Paso inductivo:
Hipótesis: $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall\, x > -1$

Tesis: $(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x \quad \forall\, x > -1$

Observar que $(1+x) > 0 \quad \forall\, x > -1$
Por lo tanto, por hipótesis se tiene que:
$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$
$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+x+nx+nx^2$
$nx^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$
En resumen,
$(1+x)^{(n+1)} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$
$\Rightarrow (1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x$

Ejercicio 2: (4 puntos)

(a) Enuncie los axiomas de orden de los números reales.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y, xy \in \mathbb{R}^+$
- $\forall x \in R, x \neq 0, x \in \mathbb{R}^+$ o $(-x) \in \mathbb{R}^+$
- $0 \notin \mathbb{R}^+$

(b) Demuestre la siguiente afirmación justificando cada uno de los pasos.

Si $x < y$ y $z < w$ entonces $x+z < y+w$.

$$\left.\begin{array}{r} x < y \Rightarrow (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ z < w \Rightarrow (w-z) \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\}$$

Luego, por axioma de orden, $(y-x)+(w-z) \in \mathbb{R}^+$
Por axiomas de cuerpo, $(y-x)+(w-z) = (y+w)-(x+z) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+z < y+w$

(c) Considere los conjuntos $A = \{\frac{1}{a} : a \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ y $B = [0, +\infty)$. Halle el supremo y el ínfimo de $A \cap B$ analizando respectivamente si son máximo y mínimo de dicho conjunto.

$A \cap B = \{\frac{1}{n} : n \in N - \{0\}\}$ (Los elementos positivos de A)
Por lo tanto:
$sup(A \cap B) = 1$
$max(A \cap B) = 1$ (Pues $1 \in A \cap B$)
$inf(A \cap B) = 0$
Y no tiene minimo pues $0 \notin A \cap B$)

Ejercicio 3: (4 puntos)

Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $g(x) = log \mid 2x \mid$.

(a) Halle las raíces de f.

Para hallar las raíces de f observamos que 1 es raíz evidente y bajamos por Ruffini. Luego obtenemos el polinomio de grado dos $x^2 - 4x + 3$ que también tiene raíz evidente 1 y volviendo a bajar por Ruffini la raíz restante nos da 3. En definitiva, 1 es raíz doble y 3 raíz simple de f.

(b) Determinar el subconjunto más grande posible del dominio de f donde poder definir $g{\circ}f$.

Para poder definir la composición, si llamamos $D \subset \mathbb{R}$ al dominio de $g{\circ}f$, necesitamos que $f(D) \subset \mathbb{R} - \{0\}$. Para esto, por lo visto en la parte (a), basta tomar $D = \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

(c) Calcule $(g{\circ}f)(0)$ y $(g{\circ}f)(2)$.

$(g{\circ}f)(0) = g(-3) = log \mid -6 \mid = log(6)$ y
$(g{\circ}f)(2) = g(8 - 20 + 14 - 3) = g(-1) = log \mid -2 \mid = log(2)$.

(d) Analice la sobreyectividad de g y la inyectividad de f. Justifique.

Por lo visto en la parte (a) $f(1) = f(3)$ por lo tanto f no es inyectiva. Para probar la sobreyectividad de g, dado $y \in \mathbb{R}$ debemos encontrar x tal que $g(x) = y$. Si tomamos $x = e^y/2$ tenemos que $g(x) = log \mid 2e^y/2 \mid = log \mid e^y \mid = log(e^y) = y$ de lo cual conlcuimos que g es sobreyectiva.

También se puede justificar realizando los bosquejos de las gráficas de f y g.