Solución del primer parcial-12 de Mayo

Versión 2

Ejericio 1

$$e^{(-\ln(8)+\ln(4))} = e^{-\ln 8} e^{ln 4} = \frac{1}{e^{\ln 8}} 4 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la opción correcta es: **Verdadero**.

Ejercicio 2

Si $P = primate$ y x designa una especie de mono (cualquiera), la afirmacion

Existe una especie de mono que no es un primate.

Podemos expresarla en lengaje matemático como:

$$\exists \quad x \text{ tal que } x \notin P.$$

Por lo tanto la negación de la misma será

$$\forall x \text{ se tiene que } x \in P$$

es decir

Todos las especies de mono son primates.

Por lo tanto la opción correcta es: **Verdadero**.

Ejercicio 3

$$\left(\frac{11}{15}\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{11}{15}\left(\frac{15}{44}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{11}{44}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto la opción correcta es: **Falso**

Ejercicio 4

Dada la proposición:

No es primavera entonces no hay golondrinas.

En este caso $P =$ no es primavera y $Q =$ no hay golondrinas. Dada una afirmación $P \Rightarrow Q$ el contrarreciproco de la misma es $\neg Q \Rightarrow \neg P$ por lo tanto el contrarreciproco de la afirmación es:

Si hay golondrinas entonces es primavera.

por lo tanto la opción correcta es: **Falso**

Ejercicio 5

Considere la función f definida en su máximo dominio de definición,

$$f(x) = \ln(\mid 8x - 8 \mid).$$

Como sabemos ésta función estará definida en aquellos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\mid 8x - 8 \mid > 0$. Sabemos que $\mid 8x - 8 \mid > 0$ sólo si $x \neq 1$. Por lo tanto el dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$. Esto descarta la opción B y D.

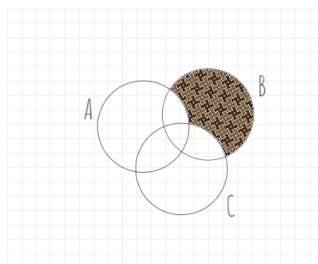
Notemos que $|8x-8|=1$ tiene como solución $x=\frac{7}{8}$ y $x=\frac{9}{8}$ entonces $f(\frac{7}{8})=f(\frac{9}{8})=0$ por lo que f no es inyectiva en su dominio y en particular f no es inyectiva restricta $\{x.-2<x<2, \quad x\neq 1\}$. Y con esto descartamos la C.
Como $Lny>0 \Leftrightarrow y<1$ entonces se tiene que f es positiva si $|8x-8|>1$.
La inecuación $|8x-8|>1$ tiene como solución $\{x : x<\frac{7}{8}\}\cup\{x : x>\frac{9}{8}\}$. Por lo tanto la opción correcta es la **A**

Ejercicio 6

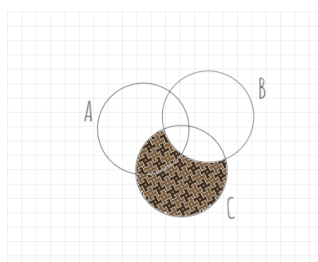
Para todo x en los reales existe y en los reales tal que $x+y=0$.
La opción correcta es la **opción B**.

Ejercicio 7

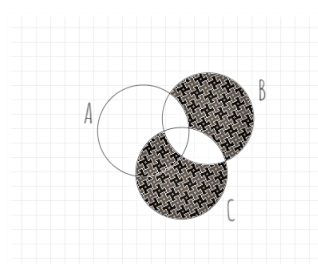
El conjunto $B\backslash(A\cup C)$ es igual a:



Y el conjunto $C\backslash B$ es igual a :



Por lo tanto el conjunto pedido



es igual a $(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus B)$. La opción correcta es la **opción C**.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio 1

1.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \,\text{y}\, x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \,\text{o}\, x \in B\}$$

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

2. La igualdad a demostrar es una de las leyes de Morgan.
   Para probar la igualdad de conjuntos debemos probar que se tiene la doble inclusión. Es decir que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y luego que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
   Probaremos primero que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Si $x \in (A \cap B)^c$ entonces por definición de complemento de un conjunto, $x \notin (A \cap B)$. Usando la definición de intersección de conjuntos tendremos que $x \in A$ pero no a B o bien $x \in B$ pero no a A.
   Si $x \in A$ pero no a B, entonces $x \in B^c$ y por lo tanto $x \in (A^c \cup B^c)$.
   Si $x \in B$ pero no a A, entonces $x \in A^c$ y por lo tanto $x \in (A^c \cup B^c)$.
   En cualquiera de los dos casos probamos que $x \in (A^c \cup B^c)$ y por lo tanto $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

   Para la otra inclusión, tomemos $x \in (A^c \cup B^c)$ y veamos que $x \in (A \cap B)^c$.
   Por definición de unión de conjuntos, si $x \in (A^c \cup B^c)$ entonces $x \in A^c$ o $x \in B^c$.
   Si $x \in A^c$, entonces $x \notin A$ y por lo tanto $x \notin (A \cap B)$.
   Si $x \in B^c$, entonces $x \notin B$ y por lo tanto $x \notin (A \cap B)$.
   En cualquier caso llegamos a que $x \notin (A \cap B)$ y por lo tanto $x \in (A \cap B)^c$.

Ejercicio 2

1. Los axiomas de orden describen el conjunto $\mathbb{R}^+$ de reales positivos
   a) Si x, $y \in \mathbb{R}^+$ entonces tanto $x + y$ como xy son ambos elementos de $\mathbb{R}^+$
   b) Si $x \neq 0$ entonces $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.
   c) $0 \notin \mathbb{R}^+$.
   Decimos que $a < b$ si $b - a \in \mathbb{R}^+$
2. Si $a < b$ entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$.
   Por hipótesis sabemos que $c \in \mathbb{R}^+$ y por el axioma (a) de orden enuciado en la parte anterior sabemos que el producto de reales positivos es un real positivo. Por lo tanto $(b - a)c \in \mathbb{R}^+$. Ahora usando la distributiva de la resta como $(b - a)c = bc - ac$ resulta que $bc - ac \in \mathbb{R}^+$ de lo que se deduce que $ac < bc$ como queríamos.

Ejercicio 3

1. Sea $f : A \to B$ una relación.
   a) Se dice función si para todo elemento a de A existe un elemento b de B tal que $f(a) = b$
   b) Sea f una función decimos que es inyectiva si dados $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   c) f es una función sobre si para todo elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$

2. Se tiene que $|x-2| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces como la exponencial es creciente $e^{|x-2|} \geq e^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Imf \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

Además dado $y \geq 1$ tenemos que $\ln y > 0$ entoces si llamamos $x_0 = \ln y + 2$ y

$$f(x_0) = e^{|x_0-2|} = e^{|\ln y|} = e^{\ln y} = y.$$

Por lo tanto:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

El codominio de f es $\mathbb{R}$ entonces la imagen está estrictamente incluida en $\mathbb{R}$ resulta que f no es sobreyectiva.

3. f no es inyectiva pues $f(1) = f(3) = e$. Tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+2} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ e^{x-2} & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

y sabemos también que las funciones e^{-x+2} y e^{x-2} son inyectivas pues son estrictamente monótonas. Si restringimos f a $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ o a $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$ resultará f inyectiva. Así que podemos tomarnos como subconjunto A a $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ o $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$. En particular si restringimos f a cualquier sunconjunto de A también será inyectiva.

4. Si consideramos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$, resulta que $g : A \to B$ es inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.