Solución del primer parcial-12 de Mayo

Versión 1

Ejericio 1

$$ln((e^3.e^2)^{-1}) = ln((e^5)^{-1}) = ln\left(\frac{1}{e^5}\right) = ln(1) - ln(e^5) = -5$$

por lo tanto la opción correcta es: **Falso**.

Ejercicio 2

Consideremos la afirmación:

Todos los caramelos en el tarro son de chocolate.

Si $T = tarro$ y x designa un caramelo(cualquiera) del tarro, podemos expresarla en lengaje matemático como:

$$\forall x \in T : x \ es \ de \ chocolate$$

Por lo tanto la negación de la misma será

$$\exists \quad x \in T : x \ no \ es \ de \ chocolate$$

es decir

Existe algún caramelo en el tarro que no es de chocolate.

Por lo tanto la opción correcta es: **Falso**.

Ejercicio 3

$$\left(\frac{3}{11}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\right)^{-2} = \left(\frac{3}{11}\left(\frac{11}{15}\right)\right)^{-2} = \left(\frac{3}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{15}{3}\right)^{2} = 5^2 = 25$$

por lo tanto la opción correcta es: **Verdadero**

Ejercicio 4

Dada una afirmación $P \Rightarrow Q$ el contrarreciproco de la misma es $\neg Q \Rightarrow \neg P$ por lo tanto el contrarrecíproco de la afirmación

Si hay golondrinas entonces es primavera.

En este caso $P =$ hay golondrinas y $Q =$ es primavera. Por lo tanto el contrarecíproco es:

Si no es primavera entonces no hay golondrinas

por lo tanto la opción correcta es: **Verdadero**

Ejercicio 5

Comencemos hallando el dominio de la función $f(x) = ln(x^2 - 2x + 1)$.
Como sabemos la función estará definida en aquellos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 - 2x + 1 > 0$. Sabemos que $x^2 - 2x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
Por lo tanto el dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$. Esto descarta la opción B y D.

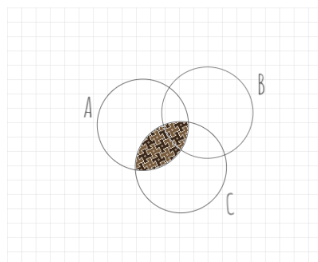
Haciendo un estudio de signo de f, tendremos que $f(x) = 0$ si y solo si $x^2 - 2x + 1 = 1$. Esta última igualdad es equivalente a que $x^2 - 2x = 0$ obteniendo así que las raíces de f son 0 y 2. Como $f(0) = f(2) = 0$ resulta que f no es inyectiva restricta a los reales positivos lo que descarta la opción A, y se deduce que la **opción C** es la correcta.

Ejercicio 6

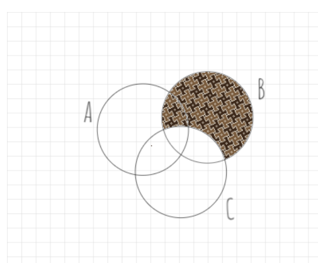
Para todo x en los reales menos el cero existe y en los reales tal que $x.y = 1$. La opción correcta es la **opción D**.

Ejercicio 7

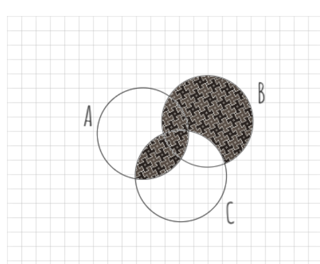
El conjunto $A \cap C$ es igual a:



Y el conjunto $C^c \cap B$ es igual a :



Por lo tanto el conjunto pedido



es igual a $(C^c \cap B) \cup (A \cap C)$. La opción correcta es la **opción B**.

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio 1

1.

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \,\mathrm{y}\, x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \,\mathrm{o}\, x \in B\}$$

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

2. La igualdad a demostrar es una de las leyes de Morgan.
   Para probar la igualdad de conjuntos debemos probar que se tiene la doble inclusión. Es decir que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y luego que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
   Probaremos primero que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Si $x \in (A \cap B)^c$ entonces por definición de complemento de un conjunto, $x \notin (A \cap B)$. Usando la definición de intersección de conjuntos tendremos que $x \in A$ pero no a B o bien $x \in B$ pero no a A.
   Si $x \in A$ pero no a B, entonces $x \in B^c$ y por lo tanto $x \in (A^c \cup B^c)$.
   Si $x \in B$ pero no a A, entonces $x \in A^c$ y por lo tanto $x \in (A^c \cup B^c)$.
   En cualquiera de los dos casos probamos que $x \in (A^c \cup B^c)$ y por lo tanto $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

   Para la otra inclusión, tomemos $x \in (A^c \cup B^c)$ y veamos que $x \in (A \cap B)^c$.
   Por definición de unión de conjuntos, si $x \in (A^c \cup B^c)$ entonces $x \in A^c$ o $x \in B^c$.
   Si $x \in A^c$, entonces $x \notin A$ y por lo tanto $x \notin (A \cap B)$.
   Si $x \in B^c$, entonces $x \notin B$ y por lo tanto $x \notin (A \cap B)$.
   En cualquier caso llegamos a que $x \notin (A \cap B)$ y por lo tanto $x \in (A \cap B)^c$.

Ejercicio 2

1. Los axiomas de orden describen el conjunto $\mathbb{R}^+$ de reales positivos
   a) Si x, $y \in \mathbb{R}^+$ entonces tanto $x + y$ como xy son ambos elementos de $\mathbb{R}^+$
   b) Si $x \neq 0$ entonces $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.
   c) $0 \notin \mathbb{R}^+$.
   Decimos que $a < b$ si $b - a \in \mathbb{R}^+$
2. Si $a < b$ entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$.
   Por hipótesis sabemos que $c \in \mathbb{R}^+$ y por el axioma (a) de orden enuciado en la parte anterior sabemos que el producto de reales positivos es un real positivo. Por lo tanto $(b - a)c \in \mathbb{R}^+$. Ahora usando la distributiva de la resta como $(b - a)c = bc - ac$ resulta que $bc - ac \in \mathbb{R}^+$ de lo que se deduce que $ac < bc$ como queríamos.

Ejercicio 3

1. Sea $f : A \to B$ una relación.
   a) Se dice función si para todo elemento a de A existe un elemento b de B tal que $f(a) = b$
   b) Sea f una función decimos que es inyectiva si dados $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
   c) f es una función sobre si para todo elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$

2. Se tiene que $|x-2| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces como la exponencial es creciente $e^{|x-2|} \geq e^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Imf \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

   Además dado $y \geq 1$ tenemos que $\ln y > 0$ entoces si llamamos $x_0 = \ln y + 2$ y

$$f(x_0) = e^{|x_0-2|} = e^{|\ln y|} = e^{\ln y} = y.$$

   Por lo tanto:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

   El codominio de f es $\mathbb{R}$ entonces la imagen está estrictamente incluida en $\mathbb{R}$ resulta que f no es sobreyectiva.

3. f no es inyectiva pues $f(1) = f(3) = e$. Tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+2} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ e^{x-2} & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

   y sabemos también que las funciones e^{-x+2} y e^{x-2} son inyectivas pues son estrictamente monótonas. Si restringimos f a $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ o a $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$ resultará f inyectiva. Así que podemos tomarnos como subconjunto A a $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ o $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$. En particular si restringimos f a cualquier sunconjunto de A también será inyectiva.

4. Si consideramos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$, resulta que $g : A \to B$ es inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto biyectiva.