Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Cálculo I Anual

Práctico 9

1. Particiones y funciones escalonadas

A lo largo de este práctico definiremos la función parte entera, dado $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = n \text{ donde } \quad n \quad \text{representa al mayor entero} \quad n \leq x.$$

1. Considere $f(x) = [x]$ y $g(x) = 2x$. En cada caso dibujar la gráfica de la función h definida en $[-1, 2]$

$$a) \quad h(x) = f(x) + g(x) \qquad b) \quad h(x) = f(x)g(x)$$

$$c) \quad h(x) = f(x) + g\left(\frac{x}{2}\right) \qquad d) \quad h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(3x-8)$$

2. En cada caso f representa una función definida en el intervalo $[-2, 2]$ por la fórmula indicada. Grafique cada una de ellas. Si f es escalonada encuentre $\mathcal{P}$ la partición asociada a f.

$$a) \quad f(x) = x + [x] \qquad b) \quad f(x) = 2[x] \qquad c) \quad f(x) = x - [x]$$

$$d) \quad f(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right] \qquad e) \quad f(x) = [-x] \qquad f) \quad f(x) = \left[x - \frac{1}{3}\right] - [x]$$

3. Demostrar que la función parte entera cumple las siguientes propiedades:

$$a) \quad [x+n] = [x] + n \quad \text{para todo} \quad n \quad \text{en los enteros.} \qquad b) \quad [-x] = -[x] - 1 \quad \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

$$c) \quad [-x] = -[x] \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \qquad d) \quad [x+y] = [x] + [y] \quad \text{o} \quad [x] + [y] + 1 \quad .$$

$$e) \quad [2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] \qquad f) \quad [3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$$

4. Escriba las particiones equiespaciadas por n intervalos de I en los siguientes casos. En cada uno identifique el k-ésimo intervalo y la longitud de cada uno de ellos.

$$a) \quad n = 5,\ I = [0, 1] \qquad b) \quad n = 6,\ I = [-1, 1] \qquad c) \quad n \text{ arbitario },\ I = [0, 2] \qquad d) \quad n \text{ arbitario },\ I = [3, 5]$$

2. Integral de Funciones Escalonadas.

1. Calcule las siguientes integrales de funciones escalonadas.

$$e) \quad \int_{-1}^{3} [x]dx \qquad f) \quad \int_{-1}^{3} 2[x]dx \qquad g) \quad \int_{-1}^{3} \left[x + \frac{1}{2}\right] dx$$

$$h) \quad \int_{-1}^{3} [2x]dx \qquad i) \quad \int_{-1}^{3} ([x] + \left[x + \frac{1}{2}\right])dx \qquad j) \quad \int_{-1}^{3} 2[-x]dx$$

2. De un ejemplo de una función escalonada s definida en $[0, 5]$ tal que $\int_0^5 s(x)dx = 2$ y $\int_0^2 s(x)dx = 7$.

3. Probar que $\int_a^b [x]dx + \int_a^b [-x]dx = a - b$.

4. a) Sea n un entero positivo, demostrar que $\int_0^n [t]dt = \frac{n(n-1)}{2}$.
   b) Considero: $f(x) = \int_0^x [t]dt$, graficar para $x \in [0,7]$.

5. a) Demostrar que $\int_0^2 [t^2]dt = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.
   b) Calcular $\int_{-3}^3 [t^2]dt$

6. a) Si n es un entero positivo, demostrar que $\int_0^n [t^2]dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.
   b) Considero $f(x) = \int_0^x [t^2]dt$, graficar f para $x \in [0,3]$.
   c) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\int_0^x [t^2]dt = 2(x-1)$.

7. Sea f una función escalonada.
   a) Demuestre que la propiedad de la traslación se puede expresar en la forma siguiente: $\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(x+c)dx$
   b) Demuestre la propiedad de dilatación o contracción del intervalo de integración: $\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(x)dx$.
   c) Muestre que lo anterior es equivalente a $\int_{ka}^{kb} f(x)dx = k \int_a^b f(kx)dx$.

8. Considero $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada y $\mathcal{P}$ su partición asociada,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad , f(x) = a_k \quad \text{si} \quad x \in (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \ldots, n$$

Si en lugar de definir integral de función escalonada como se definió en el curso, se tomará como definición la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 (x_k - x_{k-1}),$$

se tendría una teoría alternativa de integración. Cuál de las siguientes propiedades permanecería válida en este nuevo marco teórico?

$$a) \quad \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad b) \quad \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \qquad .$$

$$c) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx \qquad d) \quad \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(x+c) \qquad .$$

$$e) \quad \text{Si } f(x) < g(x) \text{ entonces } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Optativo) Resolver el ejercicio anterior si definimos,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k^2 - x_{k-1}^2).$$

3. Sumas Superiores e Inferiores.

1. Calcule $S^*(f,P)$ y $S_*(f,P)$ en los siguientes casos

   a) $f(x) = x^2$, $P = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = \{1,2,3,4\}$ *c)* $f(x) = \sqrt{x}$, $P = \{0,1,4,9\}$

   d) $f(x) = e^x$, $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ *e)* $f(x) = 2x - x^2$, $P = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

   f) $f(x) = x^2$, siendo $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_k = \dfrac{k}{n}$ $k = 0, \ldots, n$.

   g) $f(x) = 2x - x^2$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_k = \dfrac{3k}{n} + 1$ $k = 0, \ldots, n$.

2. *a)* Calcular $\int_1^3 x\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equispaciadas.
   Recordar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   b) Calcular $\int_0^3 x^2\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas.
   Recordar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Bosquejar la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ Calcular $\int_a^b f(x)\,dx$

4. Sea P una equipartición de $[0,1]$, halle la suma superior e inferior de las siguientes funciones. Discuta la integrabilidad de cada una.

   a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *c)* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Considero $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ particiones del intervalo $[a,b]$. Pruebe las siguientes propiedades:

   a) Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, entonces $-M(b-a) \leq S_*(f,\mathcal{P}) \leq S^*(f,\mathcal{P}) \leq M(b-a)$.

   b) $S_*(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S^*(f,\mathcal{P})$, para todo $\mathcal{P}$ partición.

   c) $S_*(f,\mathcal{Q}) \leq S^*(f,\mathcal{P})$, para todo para de particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

   d) $\mathcal{P}$ es un refinamiento de $\mathcal{Q}$ entonces $S_*(f,\mathcal{Q}) \leq S_*(f,\mathcal{P}) \leq S^*(f,\mathcal{P}) \leq S^*(f,\mathcal{Q})$

6. Mostrar las siguientes igualdades

   a) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{S_*(f,\mathcal{P}_n) :$ $\mathcal{P}_n$ es la partición equiespaciada por n intervalos.$\}$

   b) $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S^*(f,\mathcal{P}_n) :$ $\mathcal{P}_n$ es la partición equiespaciada por n intervalos.$\}$