Universidad de la República **Cálculo I Anual**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Práctico 6

1. Símbolo Sumatorio

1. Hallar los valores numéricos de las sumas siguientes:

$$a)\ \sum_{i=1}^{10} i \qquad b)\ \sum_{i=6}^{12}(2i-1) \qquad c)\ \sum_{i=3}^{8} i^2 \qquad d)\ \sum_{i=1}^{5}(2i-1)^2 \qquad e)\ \sum_{i=5}^{8} i^3$$

$$f)\ \sum_{i=2}^{6} i(i!) \qquad g)\ \sum_{i=5}^{10} \frac{1}{i(i+1)}$$

2. Demostrar a las igualdades y concluir que no hay una única expresión posible de una suma dada.

$$\sum_{i=1}^{6} 2^{i-1} = \sum_{j=0}^{5} 2^j = \sum_{k=0}^{5} 2^{5-k} = \sum_{q=1}^{6} 2^{6-q}$$

3. Establecer las siguientes propiedades del símbolo de sumación:

   a) **Propiedad aditiva:** $\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

   b) **Propiedad homogénea:** $\sum_{k=1}^{n} C.a_k = C.\sum_{k=1}^{n} a_k$ donde C es una constante real.

   c) **Propiedad telescópica:** $\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_1$

2. Inducción Completa

1. Demostrar las siguientes igualdades usando el método de inducción completa:

$$a)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$d)\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \qquad e)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$f)\ \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1 \qquad g)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. Demostrar las siguientes desigualdades usando el método de inducción completa:

$$a)\ (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\, x > -1, \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

$$c)\ n - 2 < \frac{n^2 - n}{12}, \quad \forall n > 10 \qquad d)\ n^2 < 2^n, \quad \forall n > 4 \qquad e)\ 2^n < n!, \quad \forall n > 3$$

3. *a*) Probar que
$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ para todo } x \neq 1$$

   b) Probar que dados $0 \leq x < y$ se verifican las desigualdades
$$(y-x)x^n \leq \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{n+1} \leq (y-x)y^n$$

4. Pruebe que dados $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

5. Sea b un entero positivo, entonces para cada $n \geq 0$ existen enteros no negativos Q y R tales que:
$$n = Qb + R, \quad 0 \leq R < b.$$

6. Probar que la ecuación $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$ cumple el paso inductivo para todo n y sin embargo la igualdad no se cumple para ningún n.

7. Sea A un subconjunto de naturales no vacío. Probar que existe $n \in A$ tal que $\forall m \in A$ se tiene que $n \leq m$.

   Probar que si A es finito entonces existe $m \in A$ tal que para todo $n \in A$ se cumple que $n \geq m$. A tal número se le denomina máximo de A.

8. Suponga que tiene una bolsa con n bolillas distinguidas, por ejemplo numeradas del 1 al n. Probar que $f(n,i)$ es la cantidad de maneras de tomar i boillas de las n. Deducir que la cantidad de subconjuntos de un conjunto A de n elementos es 2^n.

9. Sean $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ números reales positivos. Demostrar que
$$\text{mín}\left\{\frac{x_1}{y_1}, ..., \frac{x_n}{y_n}\right\} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{y_1 + ... + y_n} \leq \text{máx}\left\{\frac{x_1}{y_1}, ..., \frac{x_n}{y_n}\right\}$$