Universidad de la República **Cálculo 1 Anual 2018**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Práctico 4

1. Sean A y B dos conjuntos:

$$B \subset A \Leftrightarrow B \bigcap A = B$$

   (a) ¿Qué significa $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$?
   (b) ¿Cuál es la hipótesis y la tesis en cada caso?
   (c) ¿Cómo se prueba la igualdad de conjuntos?
   (d) Una posible prueba sería:

      ($\Rightarrow$) Sabemos que para todos los $x \in B$ se tiene que $x \in A$. Para probar que $A \cap B = B$ probremos la doble inclusión:

   ($B \bigcap A \subseteq B$) : Es una de las propiedades básicas de intersección.
   ($A \cap B \supseteq B$) : Si $x \in B$ entonces sabemos por hipótesis que $x \in A$ lo que implica que $x \in A \cap B$.

      ($\Leftarrow$) Supongamos que $\exists \quad x \in B$ y x no pertenece a A. Esto implicaría que x no pertenece a $A \cap B$ pero ($\star$) $A \cap B = B$ así que x no pertentecería a B y esto es absurdo.

   ¿Cuál argumento se usa en ($\star$)?
   (e) ¿Qué técnica se usa para probar ($\Leftarrow$)
   (f) Pruebe $B \subset A \Leftrightarrow B \bigcap A = B$

2. Negar, sin usar la palabra no, las siguientes afirmaciones.

   (a) Ningún $x \in \mathbb{R}$ cumple que $x^2 = -1$.
   (b) Algunos juegos de comedor traen menos de 3 sillas.
   (c) (Primer parcial, primer semestre 2010)
   Todos los hombres son inmortales.

3. Dar el recíproco y contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si pintas tu casa de blanco ahorras energía.
   (b) Si el piso esta mojado es por que llovió.
   (c) Si el boleto de bus sube, más gente usara bici.

4. (a) Escriba el contrarrecíproco y el recíproco del siguiente enunciado:

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow x^2 - x > 0.$$

   (b) determine cuál (si la hay) de las tres afirmaciones es cierta.
   (c) Haga lo mismo para el enunciado

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow x^2 - x > 0.$$

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Escriba la negación de cada uno de los siguientes enunciados:

   (a) $\forall\, a \in A$ se verifica que $a^2 \in B$.

   (b) $\exists\, a \in A$ tal que se verifica que $a^2 \in B$.

6. **Un ejemplo, una prueba.**

   Probar que las siguientes igualdades son falsas.

   a) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ con $a, b > 0$ *b)* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ *c)* $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ con $a, b \geq 0$

   d) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ con $a, b > 0$ *e)* $\dfrac{a+b}{a} = b$ con $a, b > 0$ *f)* $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$

   g) $a^{\frac{-1}{n}} = \dfrac{1}{a^n}$

7. Encuentre el error en la siguiente "demostración"?

   Sea $x = y$, entonces

$$\begin{gathered} x^2 = xy \\ x^2 - y^2 = xy - y^2 \\ (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ x + y = y \\ 2y = y \\ 2 = 1 \end{gathered}$$

8. En este ejercicio p, q son frases. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

   (a) La sentencia (p y q) es verdadera si p es vedadera.

   (b) La sentencia (p o q) es falsa si q es falsa

   (c) La sentencia (p implica q) es verdadera si p es falsa.

   (d) La sentencia (p implica q) es falsa si p es verdadera y q falsa.

   (e) Si la sentencia (p implica q) es verdadera y q es verdadero entonces p es verdadera.

   (f) Si [(no p) implica (no q)] es verdadera y q es verdadera entonces p es verdadera.

   (g) Si [(no p) implica (no q)] es verdadera y q es verdadera entonces p es falsa.

9. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos. Determine la veracidad de cada una de las siguientes afirmacions o de sus recíprocos:

   (a) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.

   (b) $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

   (c) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para al menos un $A \in \mathcal{A}$.

   (d) $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.