Estructuras de madera

7.3. Inestabilidad en pilares comprimidos

FACULTAD DE INGENIERIA

7.3. Inestabilidad en pilares comprimidos

6.3 Estabilidad de las piezas

6.3.1 Generalidades

(1)P Deben tenerse en cuenta las tensiones de flexión debidas a la curvatura inicial, las excentricidades y los desplazamientos inducidos, además de aquellos debidos a cualquier carga lateral.

(2)P La estabilidad de las columnas y la estabilidad lateral torsional debe comprobarse utilizando las propiedades características, por ejemplo $E_{0,05}$.

(3) La estabilidad de las columnas sometidas a compresión o a la combinación de compresión y flexión debería comprobarse de acuerdo con el apartado 6.3.2.

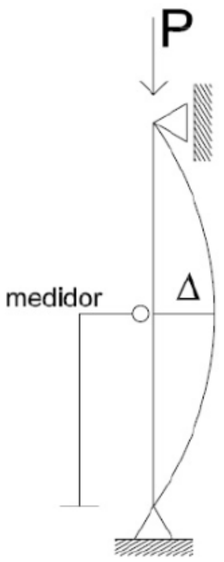
(4) La estabilidad lateral torsional de las vigas sometidas a flexión o a la combinación de flexión y compresión debería comprobarse de acuerdo con el apartado 6.3.3.

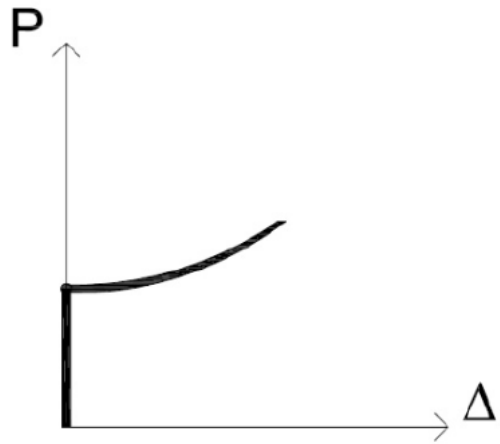
6.3.2 Columnas sometidas a compresión o a la combinación de compresión y flexión

6.3.3 Vigas sometidas a flexión o a una combinación de flexión y compresión

INTRODUCCIÓN: pandeo

PANDEO EN PILAR BIARTICULADO





El pandeo es un fenómeno de inestabilidad que ocurre solamente en barras comprimidas. Este se caracteriza por ser no lineal y desatarse bruscamente.

ENSAYO:

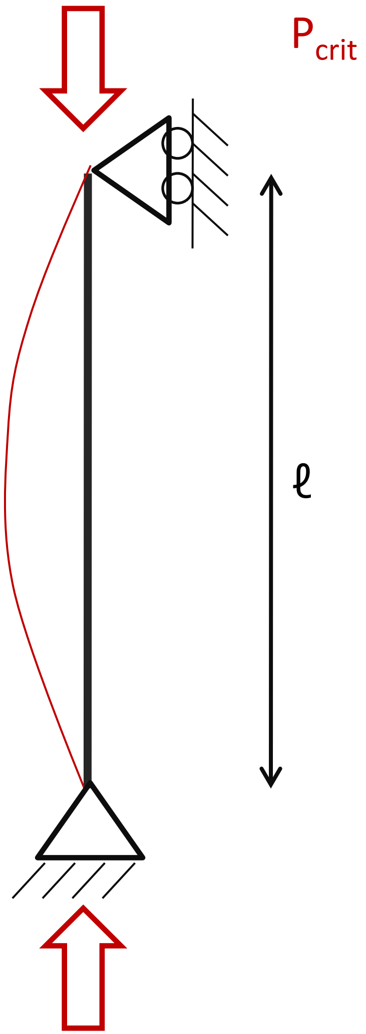
- Columna a una carga de compresión P
- P es aplicada en el baricentro

CARGA CRÍTICA:

A la menor carga de compresión con la cual se da el fenómeno de pandeo se la conoce como Carga Crítica (Pcrit).

INTRODUCCIÓN: pandeo

PANDEO EN PILAR BIARTICULADO



Inestabilidad que puede provocar el fallo de la pieza comprimida con tensiones menores las de la resistencia del material

HIPÓTESIS DE CÁLCULO*:

GEOMETRÍA:	PRISMÁTICA, SECCIÓN CTE., MOMENTO INERCIA CTE., EJE LONGITUDINAL RECTO, BIARTICULADA
MATERIAL:	ELÁSTICO LINEAL Y HOMOGÉNEO
CARGA:	CENTRADA A LO LARGO DEL EJE LONGITUDINAL

1. CARGA CRÍTICA DE EULER QUE PROVOCA EL PANDEO: $P_{crit} = \pi^2 \frac{E\,I}{\ell^2}$

E: módulo de elasticidad característico ($E_{0,05}$)
I: momento de inercia del pilar
ℓ: longitud del pilar

2. TENSIÓN CRÍTICA DE PANDEO: $\sigma_{crit} = \frac{E\,\pi^2}{\lambda^2}$

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{A\,\ell^2} = \frac{E\,\pi^2}{\frac{\ell^2}{I/A}} = \frac{E\,\pi^2}{\left(\frac{\ell}{i}\right)^2} = \frac{E\,\pi^2}{\lambda^2}$$

A: área de la sección de la pieza

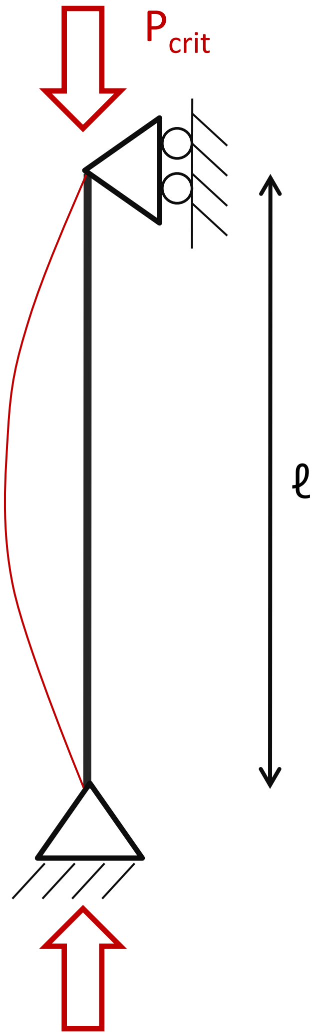
I: momento de inercia (en sección rectangular): $I_y = b \cdot h^3/12$; $I_z = h \cdot b^3/12$

i: radio de giro de la sección del pilar : $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

λ: esbeltez mecánica: $\lambda = \frac{\ell}{i}$

INTRODUCCIÓN: pandeo

PANDEO EN PILAR BIARTICULADO



1. CARGA CRÍTICA DE EULER QUE PROVOCA EL PANDEO: $P_{crit}= \lambda^2 \frac{E\,I}{\ell^2}$

2. TENSIÓN CRÍTICA DE PANDEO: $\sigma_{crit}= \frac{E\,\pi^2}{\lambda^2}$

3. ESBELTEZ MECÁNICA RELATIVA (esbeltez de Euler) $\boldsymbol{\lambda_E}$: $\lambda_E= \pi \sqrt{\frac{E_{0,05}}{f_{c,0,k}}}$

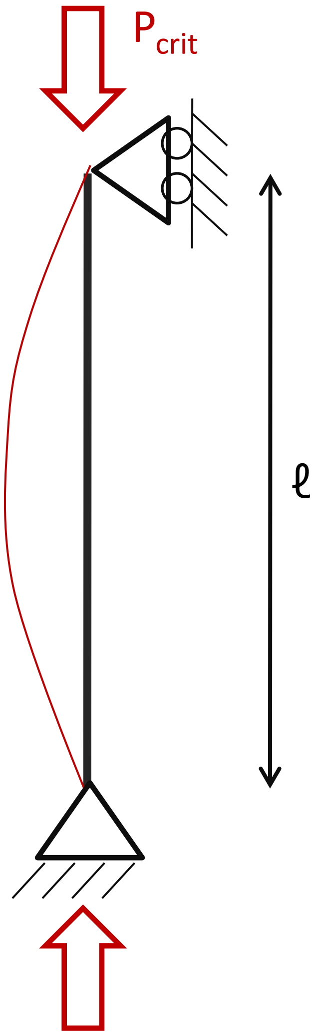
Igualando la tensión crítica (σ_{crit}) al valor característico de la resistencia compresión ($f_{c,o,k}$), y considerando el valor del 5º percentil del módulo de elasticidad ($E_{o,05}$), la esbeltez mecánica relativa resultante (esbeltez de Euler) corresponde a una columna cuya **carga crítica agota la resistencia del material**

$$\sigma_{crit}=\frac{\pi^2 \cdot E_{o,05}}{\lambda^2} = f_{c,o,k} \Rightarrow \lambda_E= \pi \sqrt{\frac{E_{0,05}}{f_{c,0,k}}}$$

$E_{o,05}$: quinto percentil del módulo de elasticidad longitudinal
$f_{c,o,k}$: valor característico de la resistencia a compresión paralela a la fibra
λ: esbeltez mecánica: $\lambda=\frac{\ell}{i}$

INTRODUCCIÓN: pandeo

PANDEO EN PILAR BIARTICULADO



4. PIEZAS ESBELTAS

En piezas esbeltas, **la tensión crítica de pandeo puede alcanzarse antes de llegar al límite de resistencia a compresión paralela a la fibra de la madera**

5. ANÁLISIS REAL DE PIEZAS DE MADERA

-IMPOSIBLE FABRICAR PIEZAS MATEMÁTICAMENTE RECTAS

-COMPORTAMIENTO EN COMPRESIÓN NO ES LINEAL EN TODAS LAS FASES

-MADERA NO ES UN MATERIAL ISÓTROPO

-MATERIAL HETEROGÉNEO (SINGULARIDADES: nudos, desvío fibra, etc.)

PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO DEL EUROCÓDIGO 5 PARA LA COMPROBACIÓN DEL PANDEO

TENSIÓN de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

k_c (<1): COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO EN PIEZAS COMPRIMIDAS, que depende de:

- **la esbeltez**
- **la calidad de la madera**

*NOTA: k_c en EC-5; X_c en CTE-DB-SE

INTRODUCCIÓN: pandeo

Resistencia de diseño

$f_{c,o,d} = K_{mod} \cdot f_{c,o,k} / \gamma$

El factor K_{mod} considera la duración de la carga y el contenido de humedad considerado a través de la clase de servicio.

En la tabla 3.1 vemos algunos valores de K_{mod} para distintos tipos de madera

Table 3.1 – Values of k_{mod}

Material	Standard	Service class	Load-duration class				
			Permanent action	Long term action	Medium term action	Short term action	Instantaneous action
Solid timber	EN 14081-1	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Glued laminated timber	EN 14080	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
LVL	EN 14374, EN 14279	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
		3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90
Plywood	EN 636						
	Type EN 636-1	1	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
	Type EN 636-2	2	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
	Type EN 636-3	3	0,50	0,55	0,65	0,70	0,90

1. Introducción

2. Comprobación a pandeo en pilares simples

3. Recomendaciones de diseño de pilares compuestos

Estructuras de madera

7.3. Inestabilidad: pandeo a compresión

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) ≤ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

k_c depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}{}^2}}$$

$$k=0.5\cdot[1+\beta_c\cdot(\lambda_{rel}-0.3)+\lambda_{rel}{}^2]$$

$$\lambda_{rel}=\frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}$$

β_c: factor asociado a la desviación de la rectitud ideal de la pieza comprimida. Cuando la desviación máxima, medida en el centro de una pieza entre apoyos es $<\ell/500$ para MLE y $<\ell/300$ para madera maciza, se pueden asumir los siguientes coeficientes:

β_c=0.2 en madera maciza

β_c=0.1 en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

λ: esbeltez mecánica: $\lambda=\frac{\ell}{i}$

$E_{0,05}$: 5º percentil del módulo de elasticidad

$f_{c,0,k}$: resistencia característica a compresión paralela a la fibra

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

k_c depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

		Coníferas y chopo												Frondosas							
		C14	C16	C18	C20	C22	C24	C27	C30	C35	C40	C45	C50	D18	D24	D30	D35	D40	D50	D60	D70
Propiedades de resistencia (en N/mm^2)																					
Flexión	$f_{m,k}$	14	16	18	20	22	24	27	30	35	40	45	50	18	24	30	35	40	50	60	70
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8	10	11	12	13	14	16	18	21	24	27	30	11	14	18	21	24	30	36	42
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	29	18	21	23	25	26	29	32	34
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	7,5	7,8	8,0	8,1	8,3	9,3	10,5	13,5
Cortante	$f_{v,k}$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	3,4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	5,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm^2)																					
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7	8	9	9,5	10	11	11,5	12	13	14	15	16	9,5	10	11	12	13	14	17	20
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7	5,4	6,0	6,4	6,7	7,4	7,7	8,0	8,7	9,4	10,0	10,7	8	8,5	9,2	10,1	10,9	11,8	14,3	16,8
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23	0,27	0,30	0,32	0,33	0,37	0,38	0,40	0,43	0,47	0,50	0,53	0,63	0,67	0,73	0,80	0,86	0,93	1,13	1,33
Módulo medio de cortante	G_{medio}	0,44	0,5	0,56	0,59	0,63	0,69	0,72	0,75	0,81	0,88	0,94	1,00	0,59	0,62	0,69	0,75	0,81	0,88	1,06	1,25
Densidad (en kg/m^3)																					
Densidad	ρ_k	290	310	320	330	340	350	370	380	400	420	440	460	475	485	530	540	550	620	700	900
Densidad media	ρ_{medio}	350	370	380	390	410	420	450	460	480	500	520	550	570	580	640	650	660	750	840	1080

NOTA 1 Los valores dados en esta tabla para la resistencia a tracción, resistencia a compresión, resistencia a cortante, 5% percentil del módulo de elasticidad, módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra y módulo de cortante se han calculado utilizando las ecuaciones dadas en el anexo A.

NOTA 2 Las propiedades relacionadas en esta tabla son aplicables a la madera que presente un contenido de humedad que corresponde a una temperatura de 20 ºC y una humedad relativa del 65%.

NOTA 3 Es probable que la madera perteneciente a las clases C45 y C50 no esté fácilmente disponible.

NOTA 4 Los valores característicos de resistencia a cortante son para madera sin firmas, de acuerdo a la Norma EN 408. El efecto de las firmas debería tenerse en cuenta en las normas de diseño.

EN 338:2009

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo $(\sigma_{c,o,d})$ $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo $(k_c \cdot f_{c,o,d})$

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

k_c depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

Tabla 6.1 Valores del factor de pandeo χ_c ($\chi_{c,y}$ o $\chi_{c,z}$), para las diferentes clases resistentes de madera maciza y laminada encolada, en función de la esbeltez mecánica y de la clase resistente

Clase Resistente	Esbeltez mecánica de la pieza																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
C14	0,98	0,93	0,86	0,74	0,60	0,48	0,39	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,09	0,08	0,08	0,07
C16	0,99	0,94	0,87	0,77	0,64	0,51	0,41	0,34	0,28	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07
C18	0,99	0,94	0,88	0,78	0,65	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C20	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,54	0,43	0,35	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C22	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C24	0,99	0,95	0,89	0,80	0,68	0,55	0,45	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08
C27	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,57	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C30	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,44	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C35	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,45	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C40	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,56	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C45	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09
C50	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,09	0,09

C.T.E.-D.B.-S.E.-M, 2009

λ: esbeltez mecánica: $\lambda = \frac{\ell}{i}$ $\qquad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

k_c depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

CR	Esbeltez mecánica de la pieza $\lambda = l/i$																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
D18	1,00	0,96	0,92	0,85	0,76	0,65	0,54	0,45	0,37	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
D24	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,41	0,35	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,14	0,13	0,12	0,10	0,09
D30	1,00	0,96	0,90	0,83	0,72	0,60	0,50	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
D35	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
D40	1,00	0,96	0,91	0,84	0,74	0,62	0,52	0,43	0,36	0,30	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
D50	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,42	0,35	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09
D60	1,00	0,96	0,92	0,85	0,76	0,65	0,54	0,45	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
D70	1,00	0,97	0,93	0,87	0,79	0,69	0,58	0,49	0,41	0,35	0,30	0,26	0,22	0,20	0,17	0,16	0,14	0,13	0,11

Argüelles et al., 2013

λ: esbeltez mecánica: $\lambda = \frac{\ell}{i}$ $\quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

k_c depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

CR	Esbeltez mecánica de la pieza $\lambda = l/i$																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
GL20h	1,00	0,98	0,96	0,92	0,85	0,74	0,62	0,51	0,42	0,35	0,30	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,14	0,12	0,11
GL22h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,47	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL24h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,82	0,70	0,57	0,47	0,39	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10
GL26h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,82	0,70	0,57	0,47	0,39	0,32	0,27	0,24	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL28h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,48	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL30h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,48	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL32h	1,00	0,98	0,96	0,91	0,84	0,72	0,60	0,49	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11
GL20c	1,00	0,97	0,94	0,87	0,75	0,61	0,49	0,39	0,32	0,27	0,23	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
GL22c	1,00	0,98	0,95	0,90	0,80	0,67	0,54	0,44	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
GL24c	1,00	0,98	0,95	0,90	0,80	0,67	0,54	0,44	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
GL26c	1,00	0,98	0,95	0,89	0,79	0,66	0,53	0,43	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
GL28c	1,00	0,98	0,94	0,89	0,78	0,64	0,52	0,42	0,34	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09
GL30c	1,00	0,98	0,94	0,89	0,78	0,64	0,52	0,42	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09
GL32c	1,00	0,97	0,94	0,88	0,77	0,63	0,51	0,41	0,34	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09

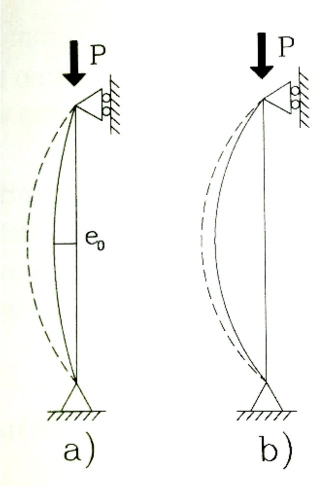
EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) **≤** RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de k_c

Se basa en la simulación numérica de pilares con determinadas propiedades mecánicas e imperfecciones geométricas, excentricidad de la carga, curvatura del pilar, defectos basados en la observación de piezas reales y comportamiento plástico a compresión Para cada pieza se determina la carga última mediante un análisis de 2° orden y considerando la plasticidad del material.



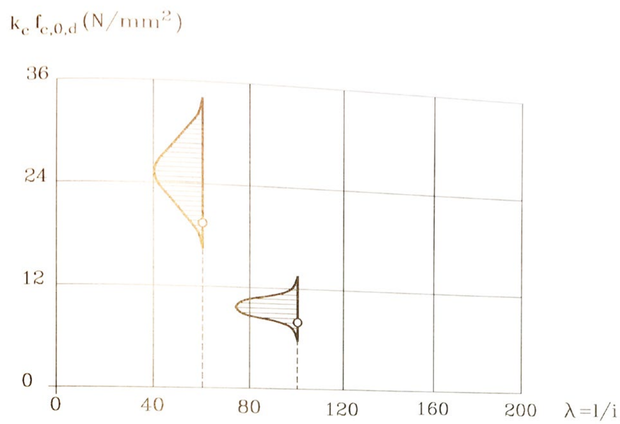


Figura I.5. Distribución de resistencias para cada esbeltez.

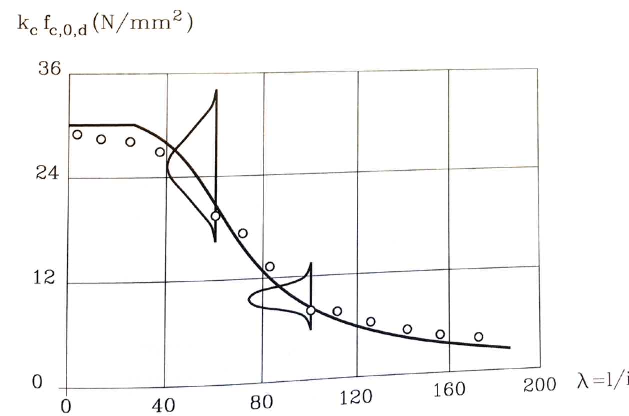


Figura I.6. Curva de pandeo.

(Argüelles et al., 2013)

Se realizan muchas simulaciones de pilares con la **misma esbeltez y C.R.**, se obtiene un conjunto **de cargas últimas y se determina el valor característico**.

Con **diferentes valores de esbeltez**, se generan las CURVAS DE PANDEO.

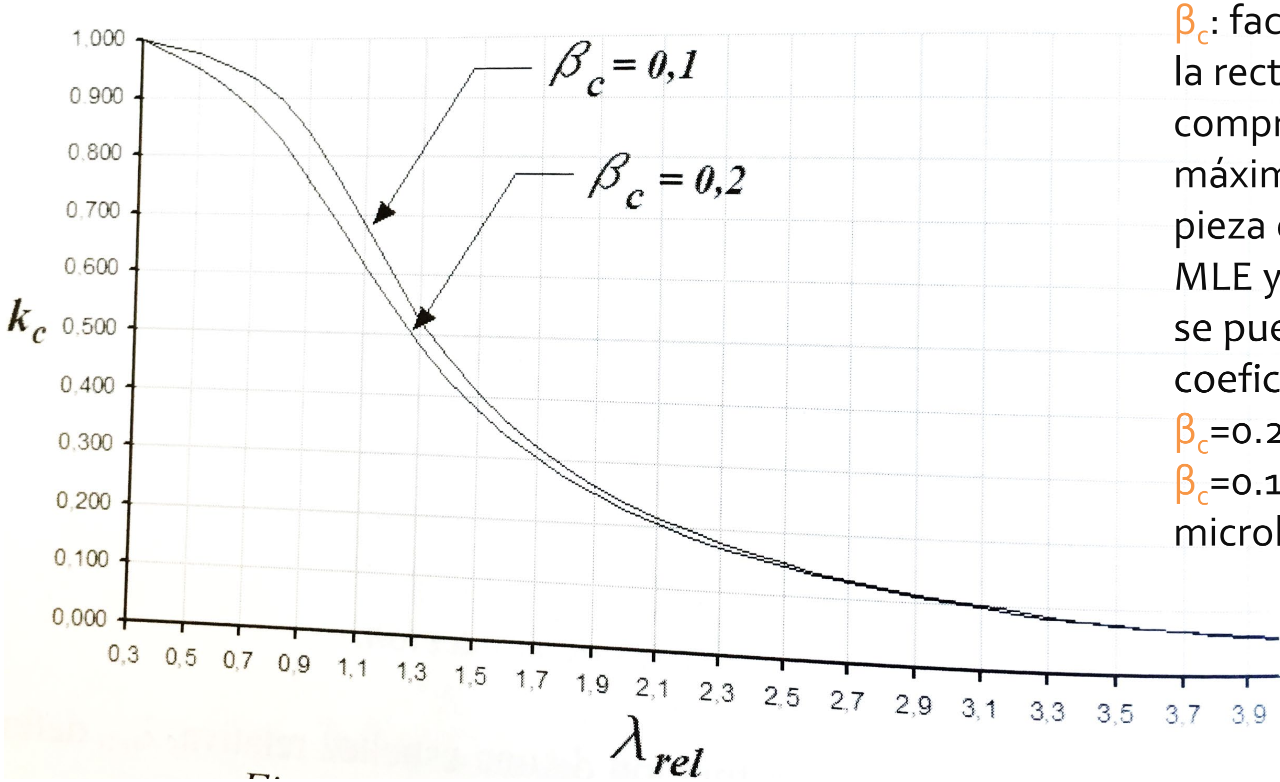
Para simplificar su determinación, se han adoptado expresiones matemáticas que se ajustan a esta curva y que toman la forma de las ecuaciones empleadas en el EC-3 para el cálculo de pilares de acero.

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo $(\sigma_{c,o,d})$ $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo $(k_c \cdot f_{c,o,d})$

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de k_c



β_c: factor asociado a la desviación de la rectitud ideal de la pieza comprimida. Cuando la desviación máxima, medida en el centro de una pieza entre apoyos es <ℓ/500 para MLE y < ℓ/300 para madera maciza, se pueden asumir los siguientes coeficientes:

β_c=0.2 en madera maciza

β_c=0.1 en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

CURVAS DE PANDEO: relación entre k_c y λ_{rel}

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,0,d}$) $\leq$ RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,0,d}$)

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de k_c

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^{\;2}}}$$

$$k = 0.5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^{\;2}]$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}$$

β_c=0.2 en madera maciza; β_c=0.1 en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

λ: esbeltez mecánica: $\lambda = \frac{\ell}{i}$

i: *radio de giro*: $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$E_{0,05}$: 5º percentil del módulo de elasticidad

$f_{c,0,k}$: resistencia característica a flexión paralela a la fibra

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,o,d}$) $\leq$ **RESISTENCIAS de cálculo** ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

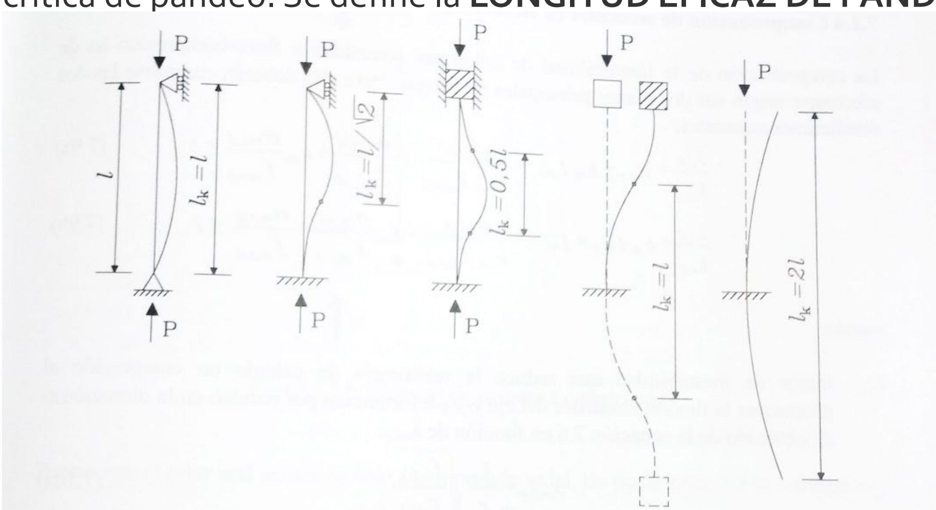
1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO (k_c)

2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de k_c

3. DETERMINACIÓN DE LAS LONGITUDES DE PANDEO

Si las condiciones de apoyo de la pieza patrón comprimida de Euler (biarticulada) varían, también varía la carga crítica de pandeo. Se define la **LONGITUD EFICAZ DE PANDEO** COMO:

$$\ell_{ef} = \ell_k = \ell \cdot \beta$$



$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$
Valor teórico				
$\beta = 1$	$\beta = 0,70$	$\beta = 0,50$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
Recomendado en madera				
$\beta = 1$	$\beta = 0,85$	$\beta = 0,70$	$\beta = 1,50$	$\beta = 2,50$

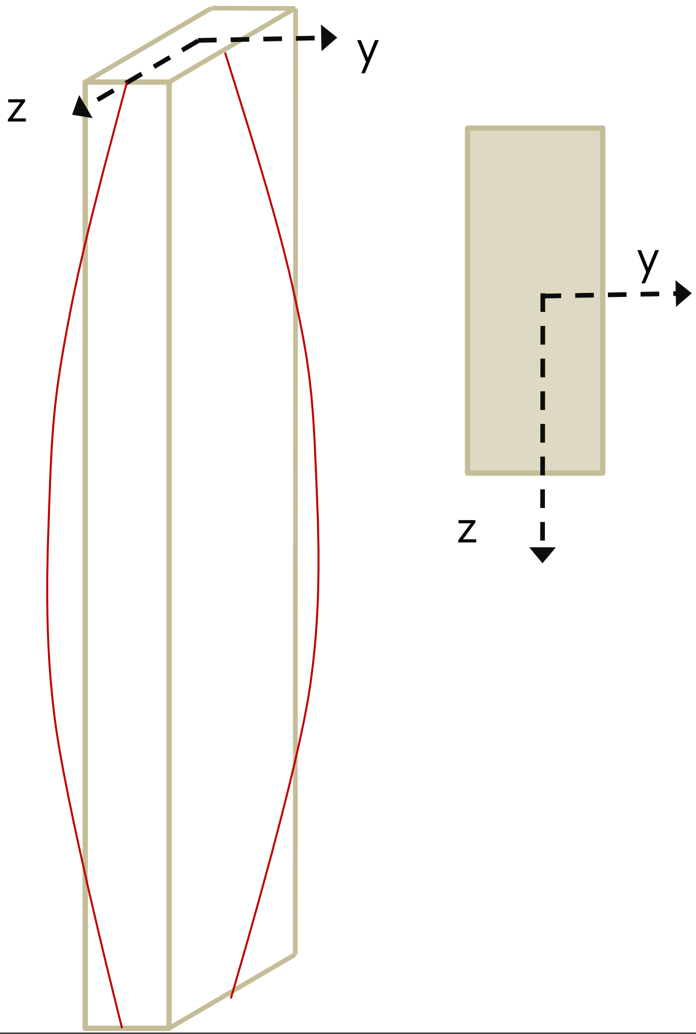
(Argüelles et al., 2013)

Las uniones en madera son deformables y, por lo tanto, es difícil conseguir uniones rígidas o empotramientos. Por lo tanto, se recomienda que los coeficientes de pandeo en estructuras de madera sean un poco mayores que los valores teóricos.

EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ($\sigma_{c,0,d}$)	$\leq$	RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,0,d}$)

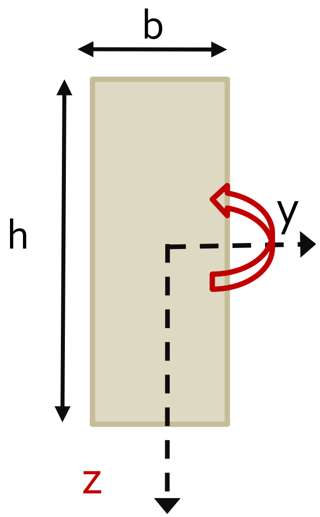
Pandeo en planos principales de inercia de la sección: y-y, z-z

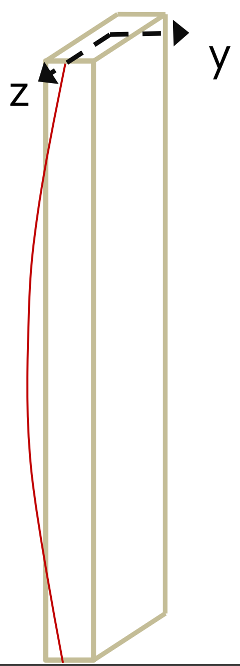


$$k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}$$

$$k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}$$

Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión





RESISTENCIAS de cálculo $(k_c \cdot f_{c,o,d})$

$k_{c,y} \cdot f_{c,o,d}$

$$k_c = \frac{1}{k_y + \sqrt{{k_y}^2 - {\lambda_{rel}}^2}} \quad \text{(Ec. 6.25)}$$

$$k_y = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,y} - 0.3) + {\lambda_{rel,y}}^2) \quad \text{(Ec. 6.26)}$$

β_c=0.2 en madera maciza
β_c=0.1 en M.L.E.y madera microlaminada

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad \text{(Ec.6.21)}$$

***Si $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ el valor de $k_c = 1$**

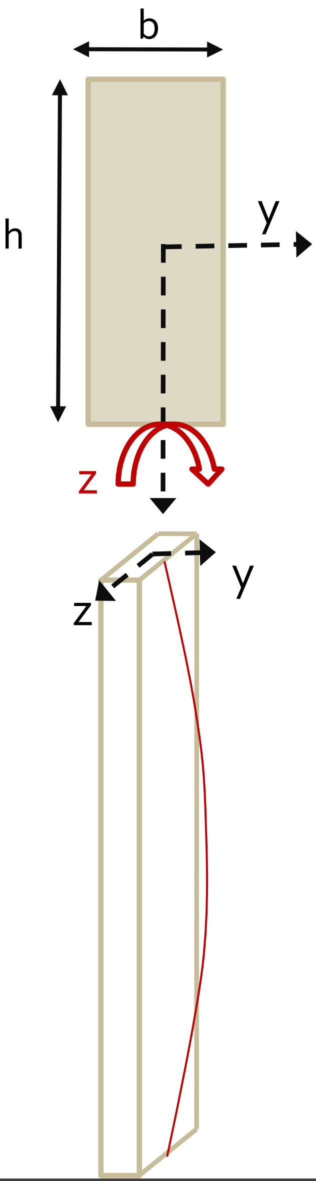
$$\lambda_y = \frac{\ell_{k,y}}{i_y} = \frac{\ell \cdot \beta_y}{0{,}289h}$$

$$\ell_{k,y} = \ell_{ef,y} = \ell \cdot \beta_y$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b\,h^3/_{12}}{b\ h}} = 0{,}289\ h$$

β_y: coeficiente de pandeo

Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión



RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)

$$k_c = \frac{1}{k_z + \sqrt{{k_z}^2 - {\lambda_{rel}}^2}}$$ (Ec. 6.25)

$k_{c,y} \cdot f_{c,o,d}$

$k_{c,z} \cdot f_{c,o,d}$

$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0.3) + {\lambda_{rel,z}}^2)$ (Ec. 6.26)

$\beta_c = 0.2$ en madera maciza

$\beta_c = 0.1$ en M.L.E.y madera microlaminada

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}$$ (Ec.6.21)

***Si $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$ el valor de $k_c = 1$**

$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0{,}289b}$$

$$\ell_{k,z} = \ell_{ef,z} = \ell \cdot \beta_z$$

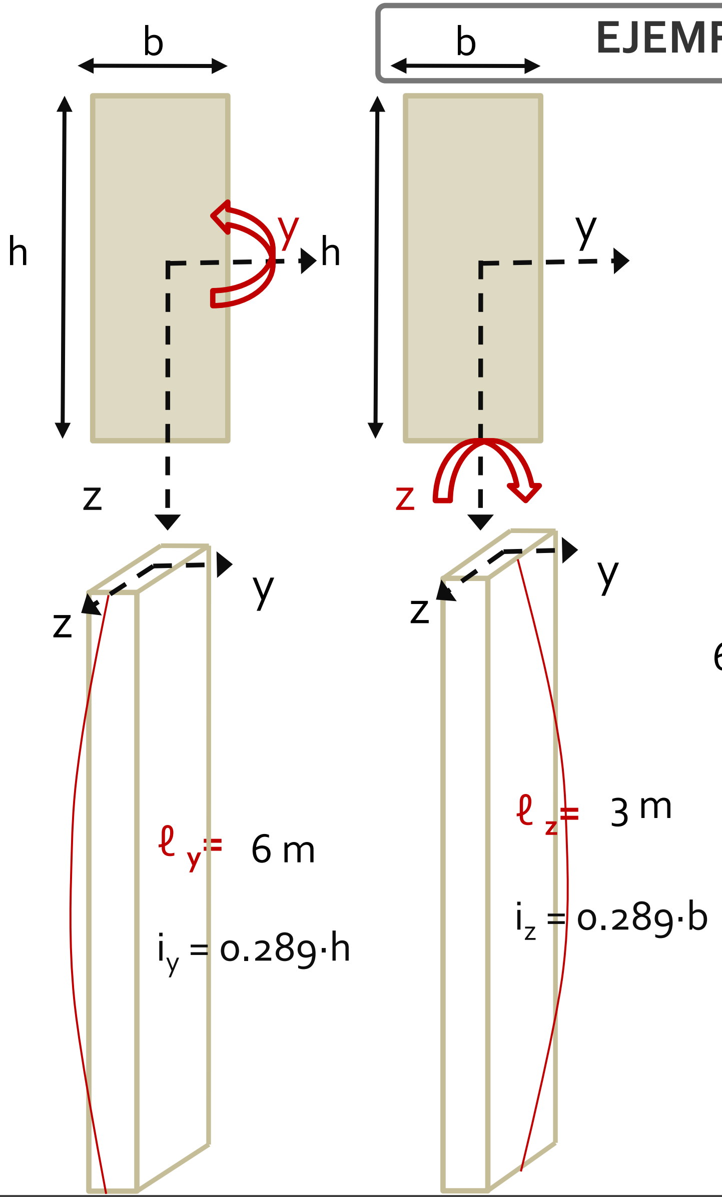
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{h\,b^3/_{12}}{b\ h}} = 0{,}289\ b$$

β_z: coeficiente de pandeo

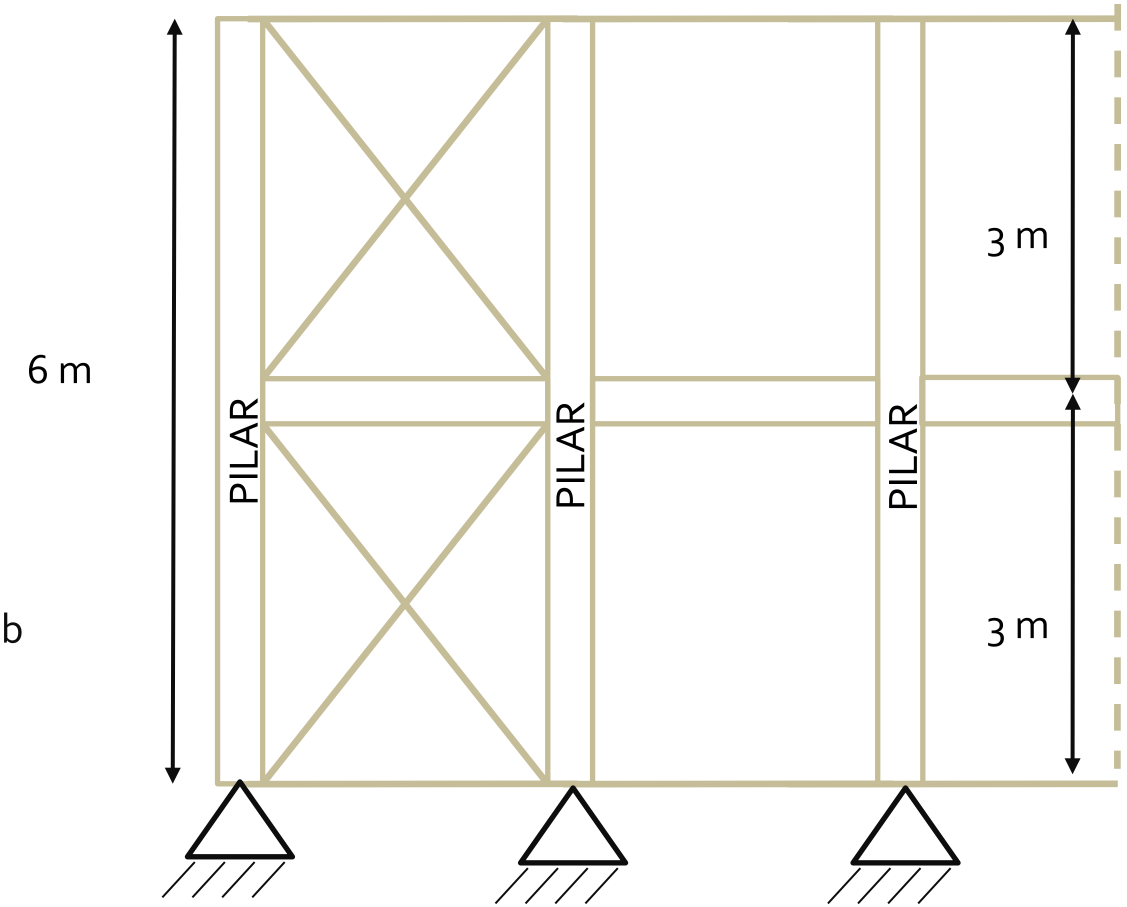
Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión: ejemplo l_{ef}

EJEMPLO:

RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)



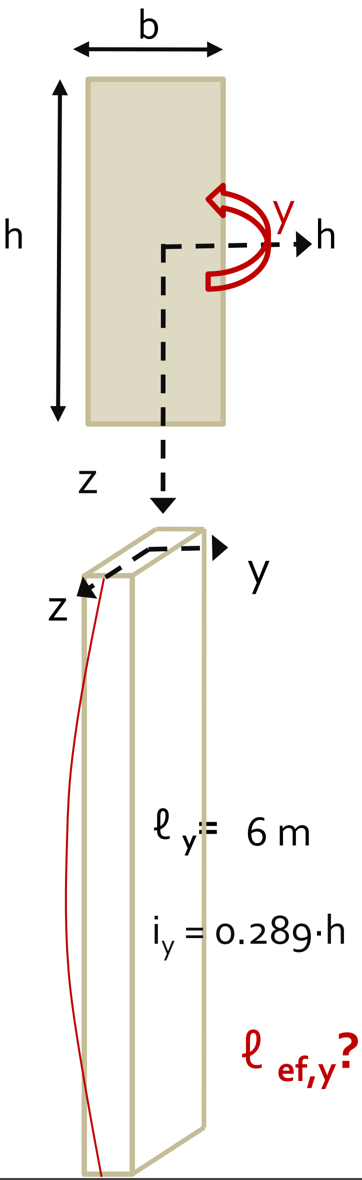
Alzado de una edificación

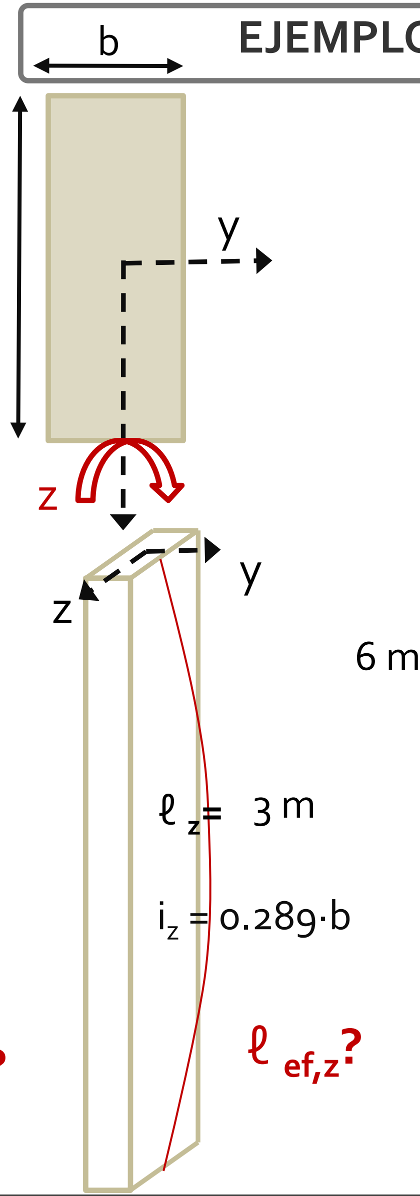


Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión: ejemplo l_{ef}

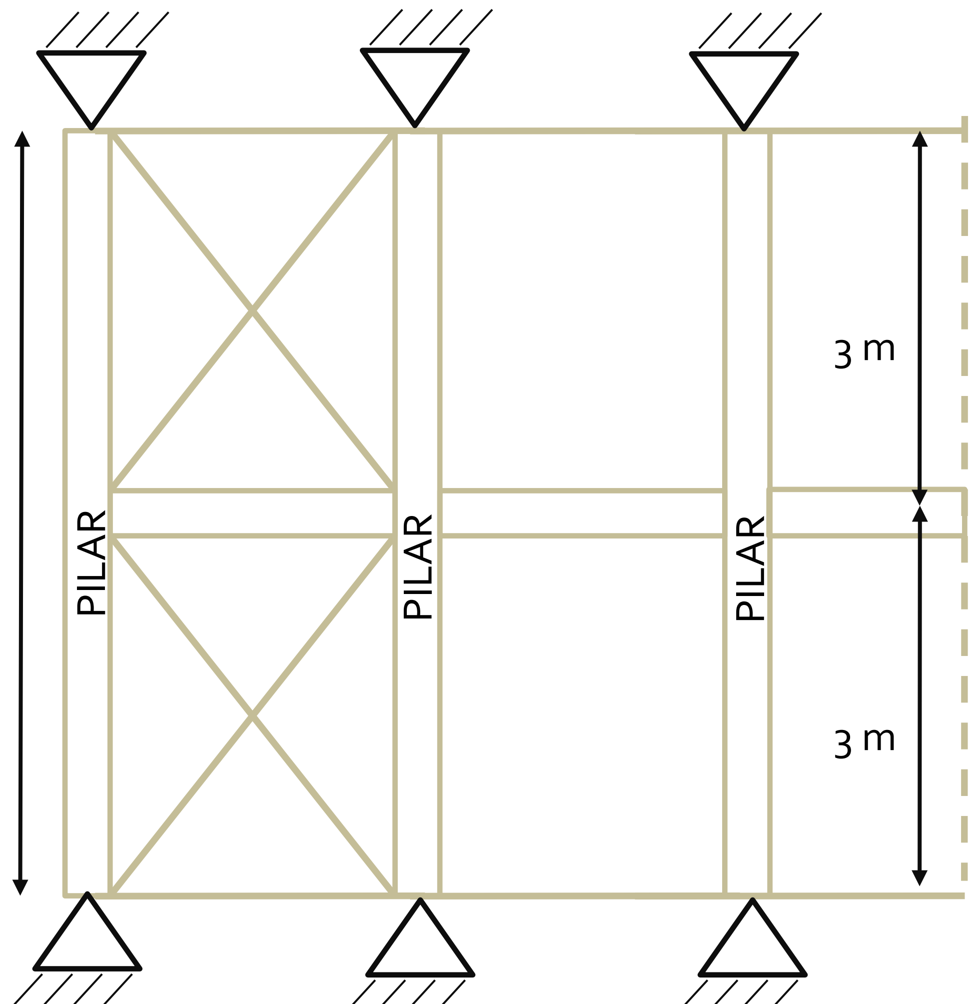
EJEMPLO:

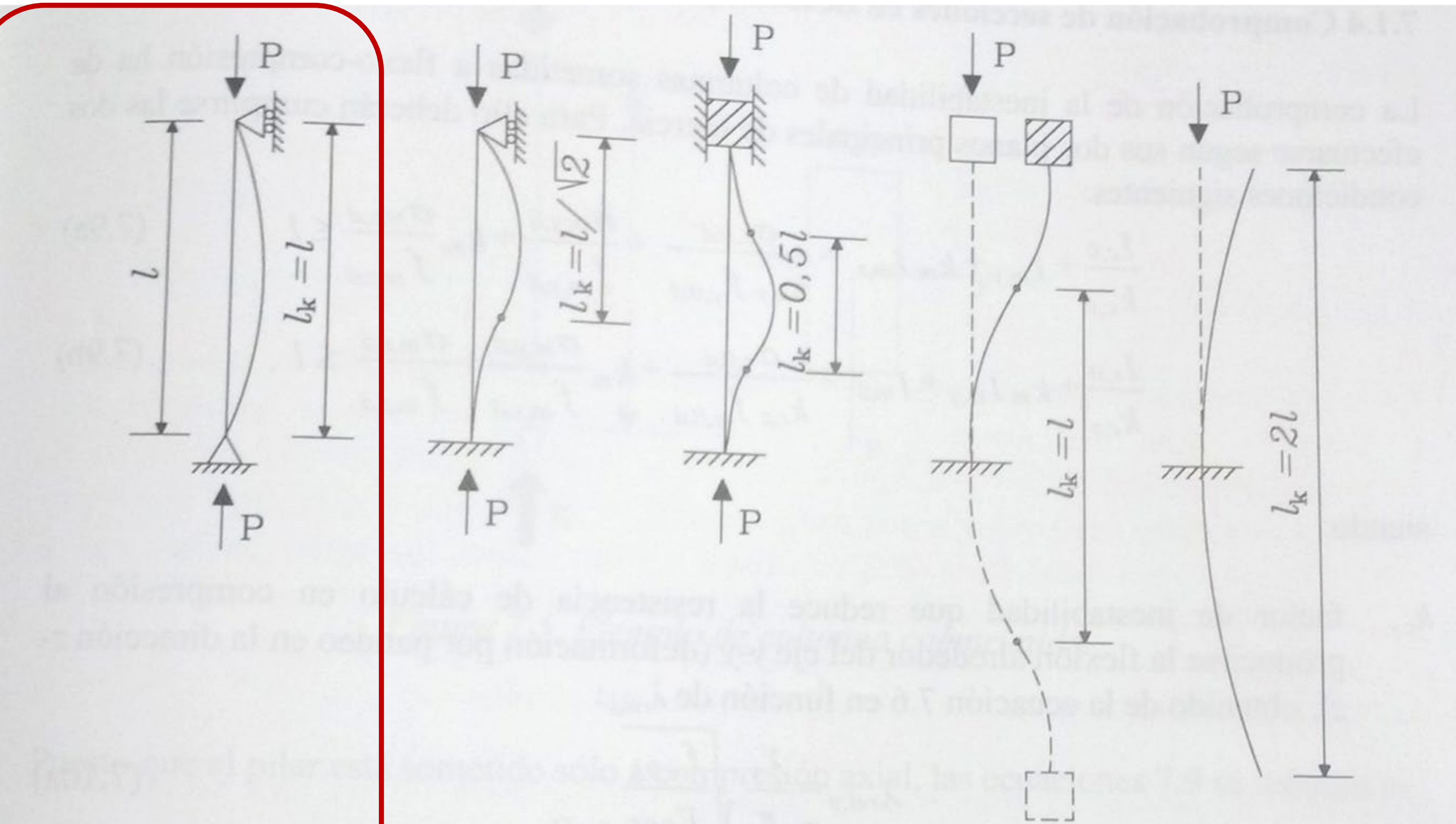
RESISTENCIAS de cálculo ($k_c \cdot f_{c,o,d}$)





Alzado de una edificación





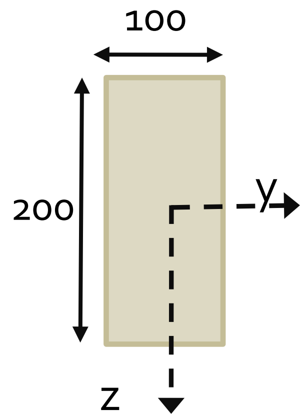
$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \dfrac{2\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$
Valor teórico				
$\beta = 1$	$\beta = 0,70$	$\beta = 0,50$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
Recomendado en madera				
$\beta = 1$	$\beta = 0,85$	$\beta = 0,70$	$\beta = 1,50$	$\beta = 2,50$

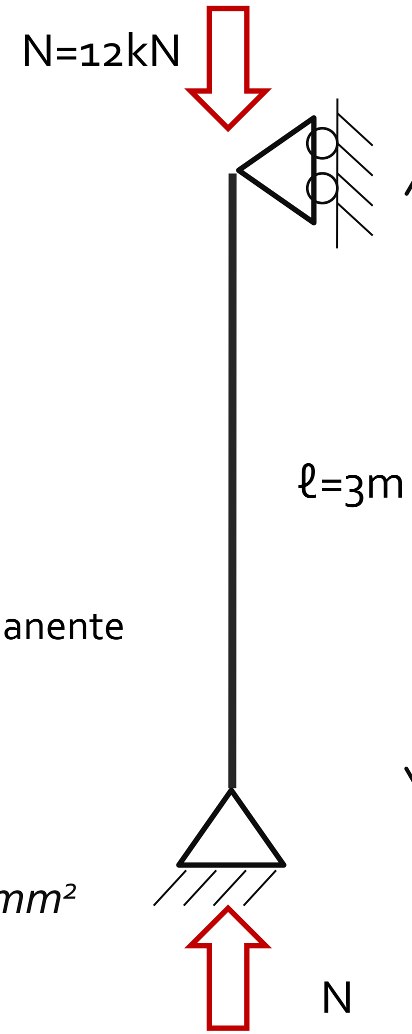
Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm²)		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm²)		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	G_{medio}	0,44
Densidad (en kg/m³)		
Densidad	ρ_k	290
Densidad media	ρ_{medio}	350





Clase resistente: C14
Duración carga: permanente
Clase servicio: 2

$f_{c,o,d=}0,6(16/1,3)=7,38\ N/mm^2$

$\sigma_{c,o,d=}1,35(12000/)100\ .200))=0,81\ N/mm^2$

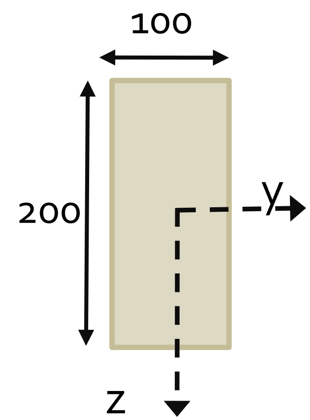
k_c

Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

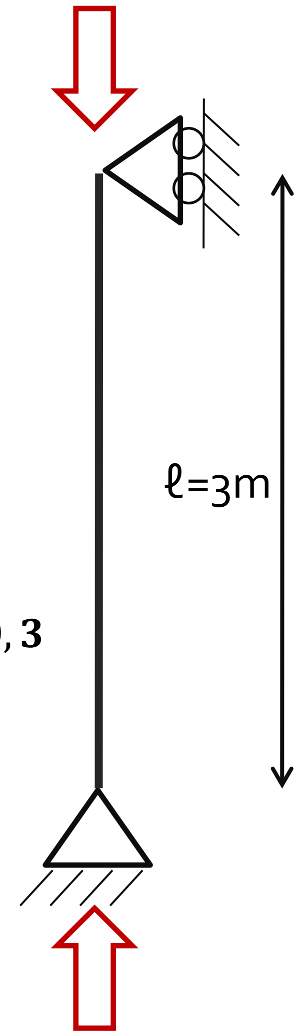
$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm^2)		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm^2)		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	G_{medio}	0,44
Densidad (en kg/m^3)		
Densidad	ρ_k	290
Densidad media	ρ_{medio}	350



$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0{,}289b} = \frac{3000\,.1}{28{,}8} = \mathbf{104,2}$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = \frac{104{,}2}{\pi}\sqrt{\frac{16}{4700}} = \mathbf{1,93} > \mathbf{0,3}$$



Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$

$$\lambda_z = 104;\ \mathrm{C.R.} = \mathrm{C14} \Rightarrow k_c = 0,24$$

Tabla 6.1 Valores del factor de pandeo χ_c ($\chi_{c,y}$ o $\chi_{c,z}$), para las diferentes clases resistentes de madera maciza y laminada encolada, en función de la esbeltez mecánica y de la clase resistente

Clase Resistente	Esbeltez mecánica de la pieza																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
C14	0,98	0,93	0,86	0,74	0,60	0,48	0,39	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,09	0,08	0,08	0,07
C16	0,99	0,94	0,87	0,77	0,64	0,51	0,41	0,34	0,28	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07
C18	0,99	0,94	0,88	0,78	0,65	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C20	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,54	0,43	0,35	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C22	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C24	0,99	0,95	0,89	0,80	0,68	0,55	0,45	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08
C27	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,57	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C30	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,44	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C35	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,45	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C40	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,56	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C45	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09
C50	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,09	0,09

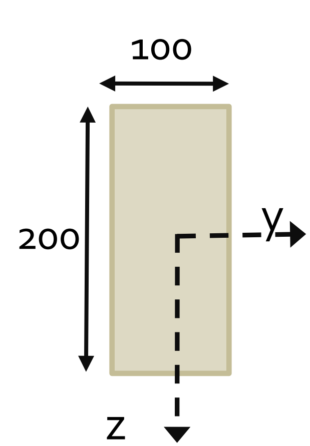
C.T.E.-D.B.-S.E.-M, 2009

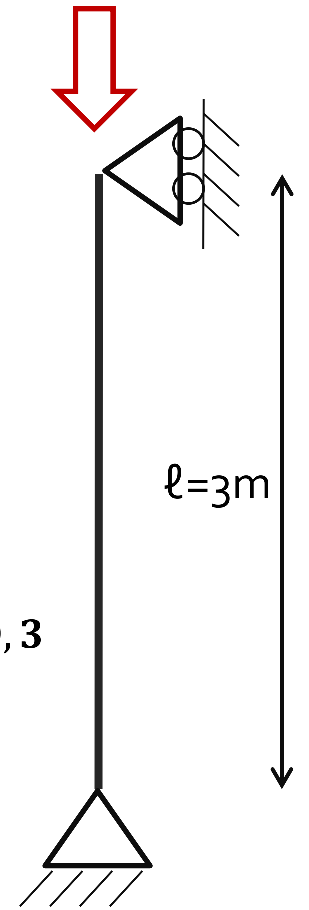
Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm²)		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm²)		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	G_{medio}	0,44
Densidad (en kg/m³)		
Densidad	ρ_k	290
Densidad media	ρ_{medio}	350





$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0{,}289b} = \frac{3000\ .1}{28{,}8} = \mathbf{104,2}$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = \frac{104{,}2}{\pi}\sqrt{\frac{16}{4700}} = \mathbf{1,93} > \mathbf{0,3}$$

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0.3) + \lambda_{rel,z}{}^2)$$

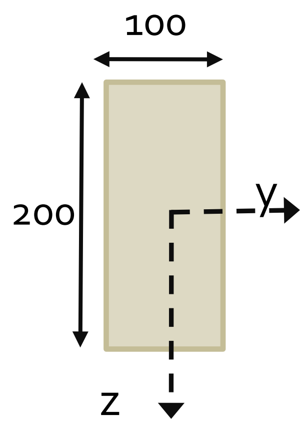
$$k_z = 0.5 \cdot (1 + 0{,}2 \cdot (1{,}93 - 0.3) + 1{,}93^2) = 2{,}52$$

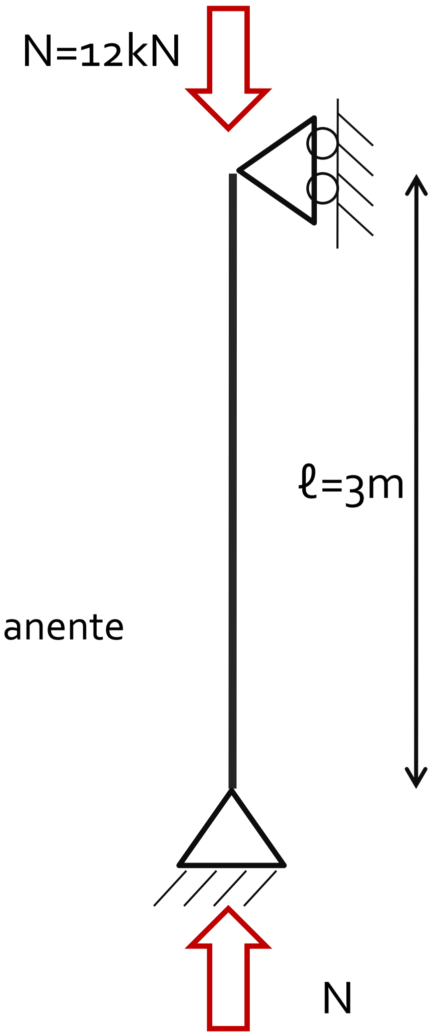
$$k_c = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z{}^2 - \lambda_{rel}{}^2}} = \frac{1}{2{,}52 + \sqrt{2{,}522 - 1{,}932}} = 0{,}241$$

Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$





Clase resistente: C14
Duración carga: permanente
Clase servicio: 2

$(\sigma_{c,o,d}=0{,}81\ N/mm^2) \leq (k_c=0{,}241)\ .\ (f_{c,o,d}=7{,}38\ N/mm^2)$

$0{,}81 < 1{,}78$

0,45 < 1: CUMPLE A PANDEO

1. Introducción

2. Comprobación a pandeo en pilares simples

3. Recomendaciones de diseño de pilares compuestos

Estructuras de madera

7.3. Inestabilidad: pandeo a compresión

Pilares compuestos

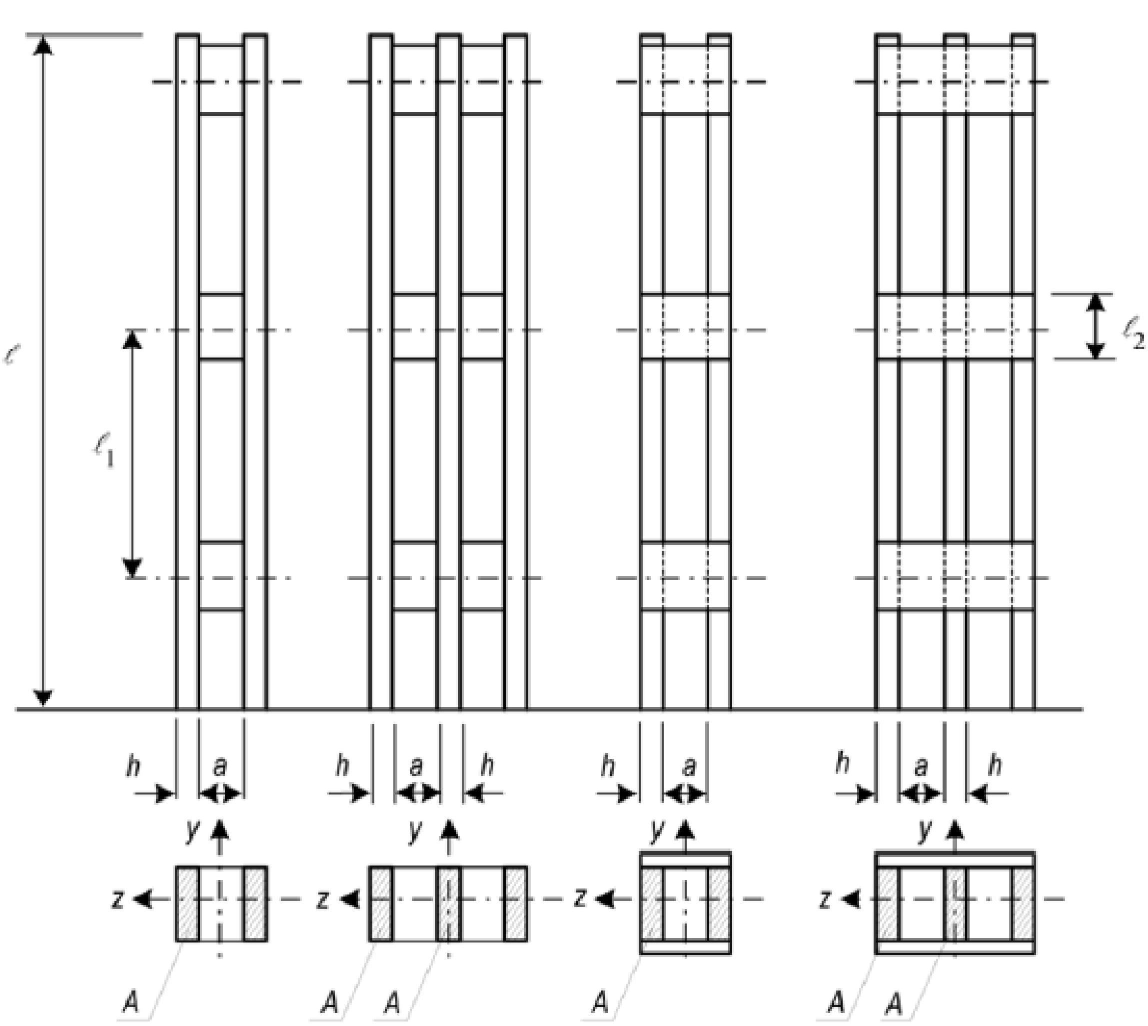
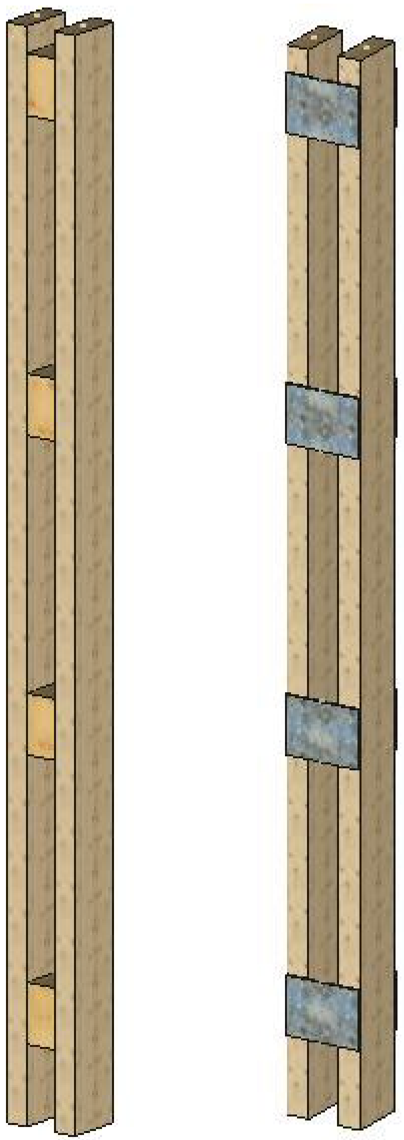


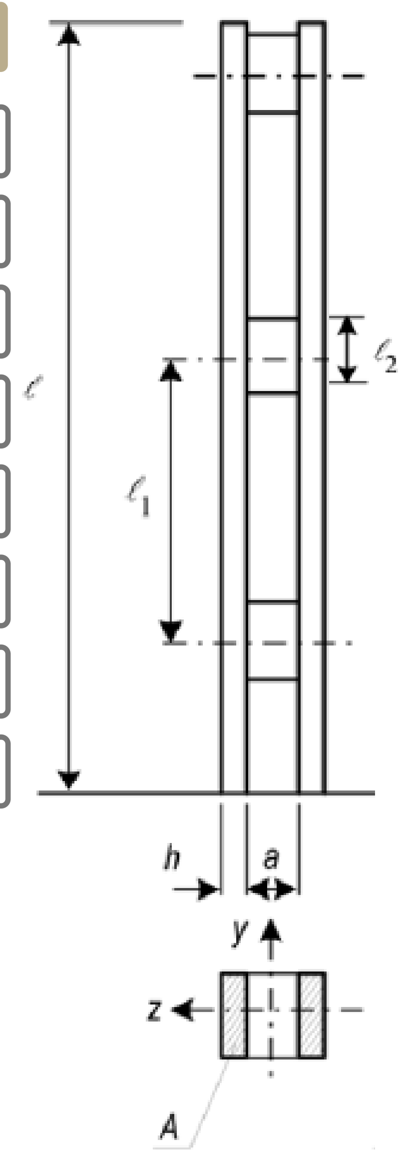
Fig. C.1 – Columnas compuestas



Pilares compuestos

HIPÓTESIS DE PARTIDA:

1. Sección transversal compuesta por 2, 3 ó 4 cordones iguales
2. Sección transversal simétrica con respecto a ambos ejes
3. Al menos 3 vanos entre conectores (conectados en extremos y en los tercios de la longitud)
4. Separadores: $a \leq 3 \cdot h$; Presillas: $a \leq 6 \cdot h$
5. Longitud del separador: $l_2/a \geq 1.5$; Longitud de presillas: $l_2/a \geq 2$
6. Mínimo de 4 clavos o dos pernos con conectores en cada plano de cortante
7. Las columnas están sometidas a cargas axiales
8. Calcular las uniones, separadores y presillas



Pilares compuestos

Ejemplo:

Sección compuesta formada por dos cordones sometida a carga axial

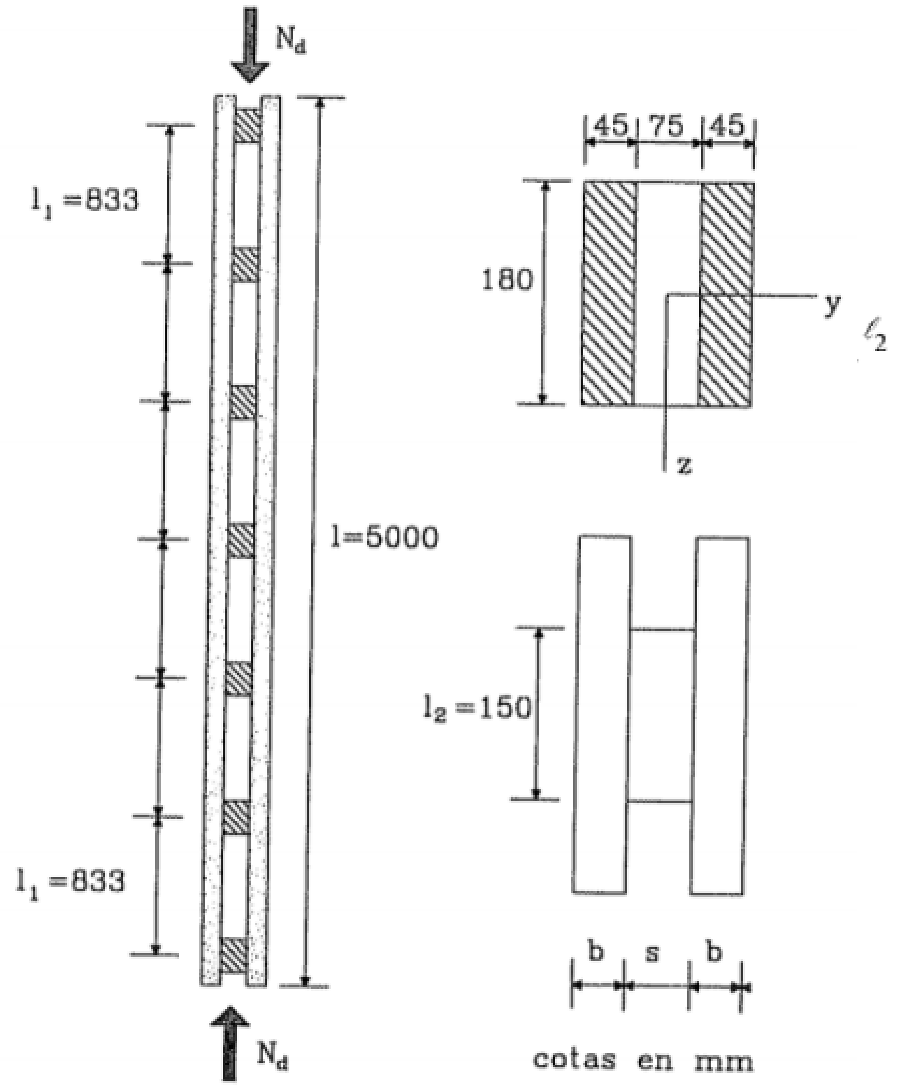
Clase resistente C24:

$f_{c,0,k}$ =21 MPa $\quad E_{0,k}$ =7400 MPa

Clase de servicio: 1

Nd=20 kN, duración media

Unión entre cordones se realiza mediante separadores de madera empernados

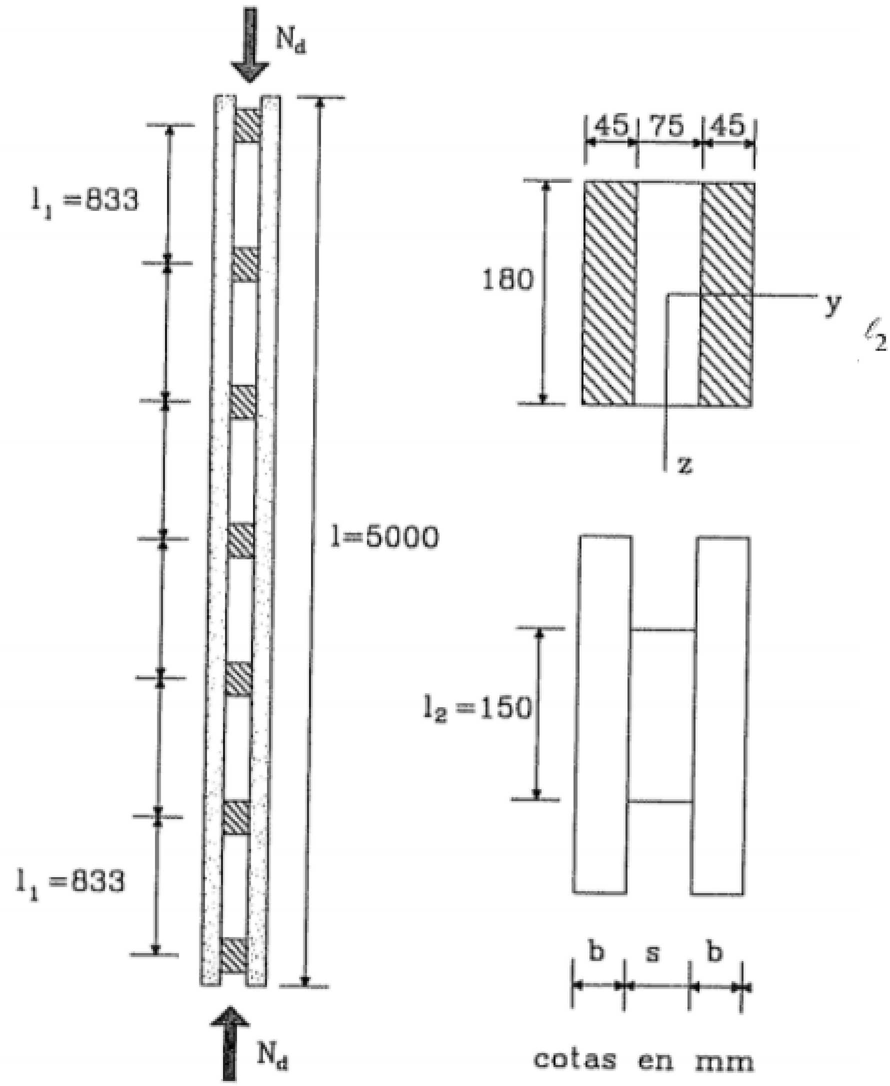


Pilares compuestos

Ejemplo:

Comprobaciones del Eurocódigo 5:

- ***El número de vanos es mayor al mínimo.***
- ***La separación entre cordones no supera al valor de 3b***
- ***La longitud de los separadores es mayor o igual a 1,5 veces la separación entre cordones.***



Pilares compuestos

Ejemplo:

Determinación de las esbelteces mecánicas en ambos planos:

$$\lambda_y = \frac{\ell_{ef,y}}{i_y} = \frac{5000}{0{,}289 \cdot 180} = 96{,}4$$

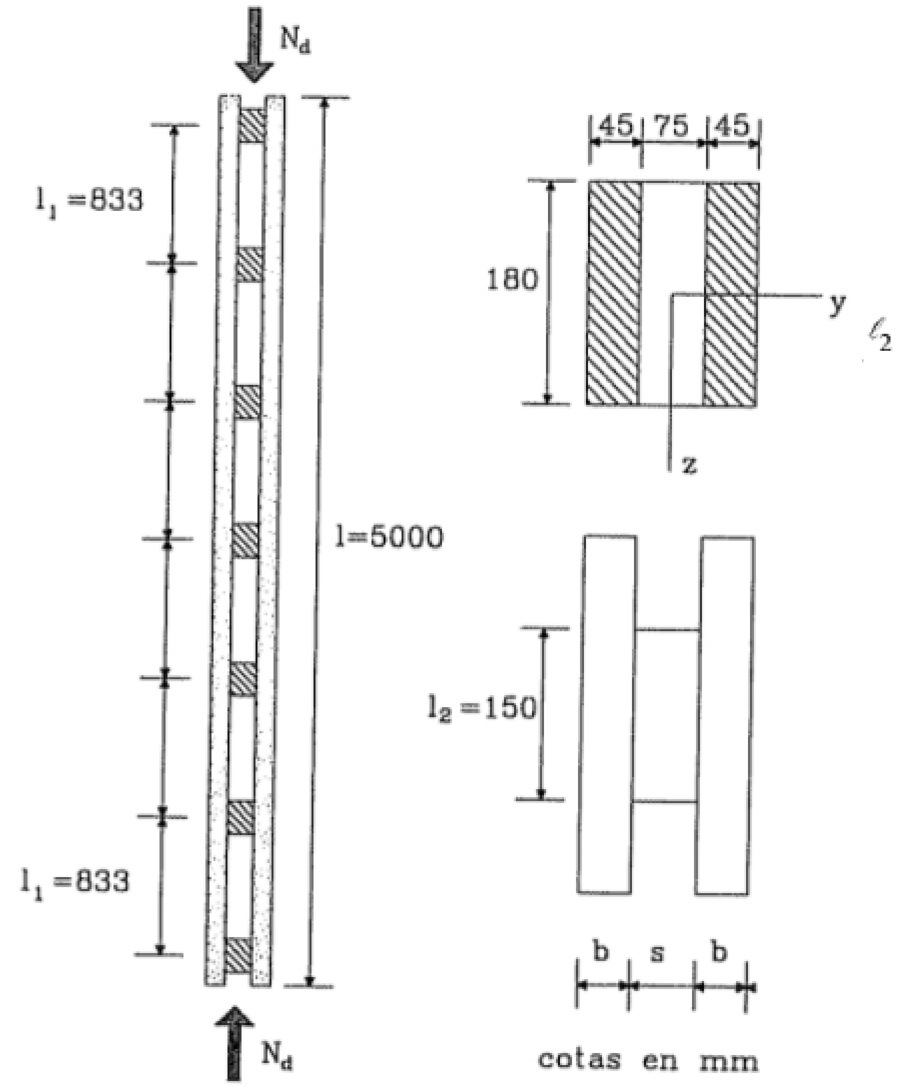
$$\lambda_z = \frac{\ell_{ef,z}}{i_z} = \frac{5000}{61{,}3} = 81{,}4$$

Ya que,

A= 2 . 45 . 180 = 16200 mm²

I_z= 180 . (165³- 75³)/12

$$i_z = \sqrt{\frac{I_{z\,t}}{A}} = \sqrt{\frac{6.105E6}{16200}} = 61.3 \text{ mm}$$



Pilares compuestos

Ejemplo:

La esbeltez mecánica efectiva se determina de la siguiente manera:

$$\lambda_{ef,z} = \sqrt{\lambda_z^{\,2} + \eta \frac{n}{2} \lambda_1^{\,2}} = \sqrt{81{,}44^2 + 2{,}5 \,.\, 64{,}3^2} = 130$$

Siendo,

$$\lambda_1 = \sqrt{12}\,\frac{l_1}{b} = \sqrt{12}\,\frac{833}{45} = 64{,}3$$

η= 2,5 ; n=2

El pando se producirá alrededor del eje z

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_{ef,z}}{\pi}\sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} = \frac{130}{\pi}\sqrt{\frac{21}{7400}} = 2{,}20$$

Duración de la carga	separadores			presillas	
	encolados	clavados	empernados con conectores	encoladas	clavadas
perman./larga	1	4	3,5	3	6
media/corta	1	3	2,5	2	4,5

Tabla 6.2. Factor η.

Pilares compuestos

Ejemplo:

Calculo Kz y Kc,z

$$K_z = 0,5\ [1 + 0,1\ .\ (2,2\ - 0,5) + 2,2^2] = 3,005$$

$$K_{c,z} = \frac{1}{3,005 + \sqrt{3,005^2 - 2,2^2}} = 0,19$$

Comprobación de resistencia

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z}.\ f_{c,0,d}} = \frac{1,23}{0,19\ .\ 12,9} = 0,5 < 1$$

A partir de esto se puede ver que la sección verifica a pandeo

Pilares compuestos

Ejemplo:

Comprobación a cortante

$$V_d = \frac{N_d}{60\, k_{c,z}} = \frac{20}{60 \cdot 0.19} = 1.754\ kN$$

$$T_d = \frac{V_d \cdot l_1}{s+b} = \frac{1.754 \cdot 833}{75+45} = 12.18\ kN$$

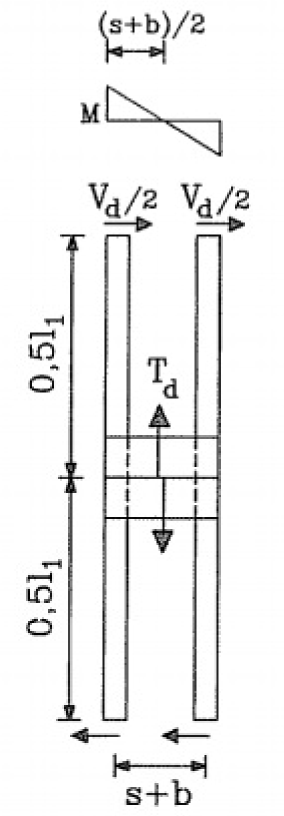
Rangos de expresión de cortante

$$V_d = \frac{N_d}{120\ k_{c,z}} \quad ; \quad \lambda_{ef,z} \leq 30$$

$$V_d = \frac{N_d\ \lambda_{ef,z}}{3600\ k_{c,z}} \quad ; \quad 30 < \lambda_{ef,z} \leq 60$$

$$V_d = \frac{N_d}{60\ k_{c,z}} \quad ; \quad \lambda_{ef,z} > 60$$

Equilibrio para hallar rasante



Pilares compuestos

Ejemplo:

Comprobación a cortante

$$V_d = \frac{N_d}{60\ k_{c,z}} = \frac{20}{60 \cdot 0.19} = 1.754\ kN$$

$$T_d = \frac{V_d \cdot l_1}{s+b} = \frac{1.754 \cdot 833}{75+45} = 12.18\ kN$$

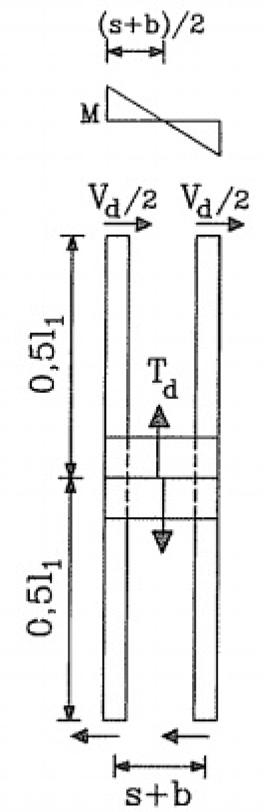
Rangos de expresión de cortante

$$V_d = \frac{N_d}{120\ k_{c,z}} \quad ; \quad \lambda_{ef,z} \leq 30$$

$$V_d = \frac{N_d\ \lambda_{ef,z}}{3600\ k_{c,z}} \quad ; \quad 30 < \lambda_{ef,z} \leq 60$$

$$V_d = \frac{N_d}{60\ k_{c,z}} \quad ; \quad \lambda_{ef,z} > 60$$

Equilibrio para hallar rasante



EJERCICIOS

Letra

Examen diciembre 2021

Ejercicio 2

Considérese un pilar doble de madera laminada de conífera, clase resistente GL24h ($E_{0,05} =$ 9.6 GPa), en clase de uso 2. El pilar está compuesto por dos piezas de 70 x 260 mm², separadas 80 mm, de manera que la sección doble queda contenida en un rectángulo de 220 x 260 mm². El pilar tiene una luz de cálculo de 4.50 m en los dos sentidos. Las dos piezas se encuentran conectadas mediante tacos (o separadores) de madera encolados, separados entre sí una distancia igual a un cuarto de la luz de cálculo.

Sobre el pilar actúan dos cargas de compresión, una debida a cargas permanentes de valor 80 kN, y otra debida a una carga variable de valor 40 kN. La carga variable tiene una duración media y los siguientes coeficientes de simultaneidad: $\psi_0 = 0.6$, $\psi_1 = 0.5$ y $\psi_2 = 0$.

Parte a

Determinar el coeficiente de verificación ($\sigma_{c,0,d}/(k_c \cdot f_{c,0,d})$) asociado a la capacidad de carga axial (con efectos de inestabilidad) para la combinación de acciones crítica. Ingresar el coeficiente con al menos tres cifras después de la coma.

Gracias por la atención