



## Estructuras de madera

### 6.5. Inestabilidad en pilares comprimidos

## 1. Introducción

2. Comprobación a pandeo en pilares simples

3. Recomendaciones de diseño de pilares

compuestos

## 6.5. Inestabilidad en pilares comprimidos

## 6.3 Estabilidad de las piezas

### 6.3.1 Generalidades

(1)P Deben tenerse en cuenta las tensiones de flexión debidas a la curvatura inicial, las excentricidades y los desplazamientos inducidos, además de aquellos debidos a cualquier carga lateral.

(2)P La estabilidad de las columnas y la estabilidad lateral torsional debe comprobarse utilizando las propiedades características, por ejemplo  $E_{0,05}$ .

(3) La estabilidad de las columnas sometidas a compresión o a la combinación de compresión y flexión debería comprobarse de acuerdo con el apartado 6.3.2.

(4) La estabilidad lateral torsional de las vigas sometidas a flexión o a la combinación de flexión y compresión debería comprobarse de acuerdo con el apartado 6.3.3.

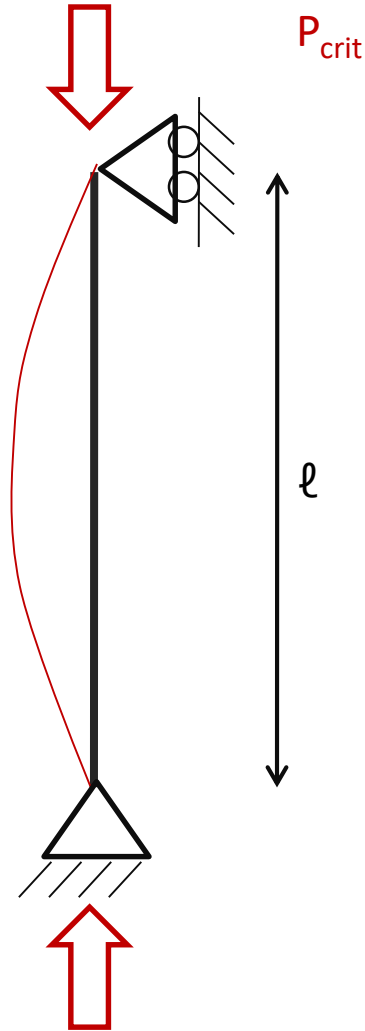
### 6.3.2 Columnas sometidas a compresión o a la combinación de compresión y flexión

### 6.3.3 Vigas sometidas a flexión o a una combinación de flexión y compresión

## INTRODUCCIÓN: pandeo

## PANDEO EN PILAR BIARTICULADO

Inestabilidad que puede provocar el fallo de la pieza comprimida con tensiones menores las de la resistencia del material



## HIPÓTESIS DE CÁLCULO\*:

GEOMETRÍA:	PRISMÁTICA, SECCIÓN CTE., MOMENTO INERCIA CTE., EJE LONGITUDINAL RECTO, BIARTICULADA
MATERIAL:	ELÁSTICO LINEAL Y HOMOGÉNEO
CARGA:	CENTRADA A LO LARGO DEL EJE LONGITUDINAL

1. CARGA CRÍTICA DE EULER QUE PROVOCA EL PANDEO:

$$P_{crit} = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$$

E: módulo de elasticidad característico ( $E_{0,05}$ )

I: momento de inercia del pilar

$\ell$ : longitud del pilar

2. TENSIÓN CRÍTICA DE PANDEO:

$$\sigma_{crit} = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{A \ell^2} = \frac{E \pi^2}{\frac{\ell^2}{I/A}} = \frac{E \pi^2}{\left(\frac{\ell}{i}\right)^2} = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$$

A: área de la sección de la pieza

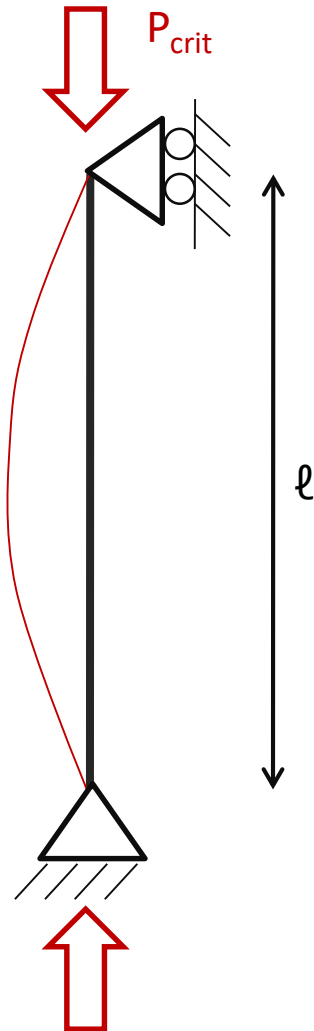
I: momento de inercia (en sección rectangular):  $I_y = b \cdot h^3 / 12$ ;  $I_z = h \cdot b^3 / 12$

i: radio de giro de la sección del pilar:  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$\lambda$ : esbeltez mecánica:  $\lambda = \frac{\ell}{i}$

## INTRODUCCIÓN: pandeo

## PANDEO EN PILAR BIARTICULADO



1. CARGA CRÍTICA DE EULER QUE PROVOCA EL PANDEO:

$$P_{\text{crit}} = \lambda^2 \frac{EI}{\ell^2}$$

2. TENSIÓN CRÍTICA DE PANDEO:

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$$

3. ESBELTEZ MECÁNICA RELATIVA (esbeltez de Euler)  $\lambda_E$ :

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E_{0,05}}{f_{c,0,k}}}$$

Igualando la tensión crítica ( $\sigma_{\text{crit}}$ ) al valor característico de la resistencia compresión ( $f_{c,0,k}$ ), y considerando el valor del 5º percentil del módulo de elasticidad ( $E_{0,05}$ ), la esbeltez mecánica relativa resultante (esbeltez de Euler) corresponde a una columna cuya **carga crítica agota la resistencia del material**

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05}}{\lambda^2} = f_{c,0,k} \Rightarrow \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E_{0,05}}{f_{c,0,k}}}$$

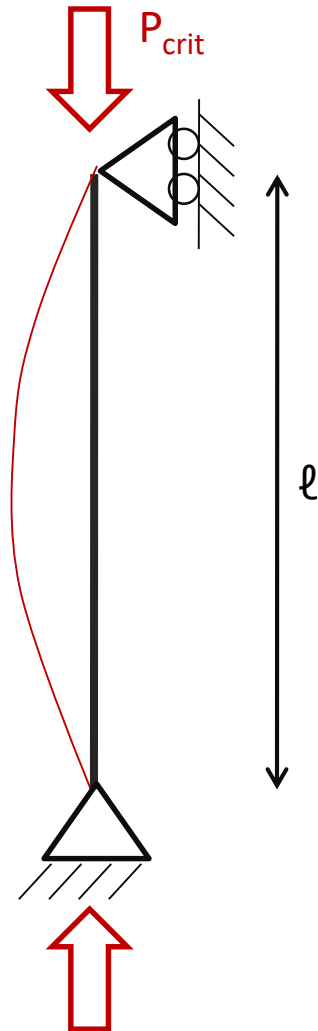
$E_{0,05}$ : quinto percentil del módulo de elasticidad longitudinal

$f_{c,0,k}$ : valor característico de la resistencia a compresión paralela a la fibra

$\lambda$ : esbeltez mecánica:  $\lambda = \frac{\ell}{i}$

## INTRODUCCIÓN: pandeo

## PANDEO EN PILAR BIARTICULADO



## 4. PIEZAS ESBELTAS

En piezas esbeltas, la **tensión crítica de pandeo puede alcanzarse antes de llegar al límite de resistencia a compresión paralela a la fibra de la madera**

## 5. ANÁLISIS REAL DE PIEZAS DE MADERA

- IMPOSIBLE FABRICAR PIEZAS MATEMÁTICAMENTE RECTAS
- COMPORTAMIENTO EN COMPRESIÓN NO ES LINEAL EN TODAS LAS FASES
- MADERA NO ES UN MATERIAL ISÓTROPO
- MATERIAL HETEROGÉNEO (SINGULARIDADES: nudos, desvío fibra, etc.)



**PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO DEL EUROCÓDIGO 5 PARA LA COMPROBACIÓN DEL PANDEO**

TENSIÓN de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )



RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

$k_c$  (<1): COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO EN PIEZAS COMPRIMIDAS, que depende de:

- la esbeltez
- la calidad de la madera

\*NOTA:  $k_c$  en EC-5;  $X_c$  en CTE-DB-SE

1. Introducción

2. Comprobación a pandeo en pilares simples

3. Recomendaciones de diseño de pilares

compuestos

**Estructuras de madera**  
6.5. Inestabilidad: pandeo a  
compresión

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

$k_c$  depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}}$$

$$k = 0.5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2]$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}$$

$\beta_c$ : factor asociado a la desviación de la rectitud ideal de la pieza comprimida. Cuando la desviación máxima, medida en el centro de una pieza entre apoyos es  $< \ell/500$  para MLE y  $< \ell/300$  para madera maciza, se pueden asumir los siguientes coeficientes:

$\beta_c = 0.2$  en madera maciza

$\beta_c = 0.1$  en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

$\lambda$ : esbeltez mecánica:  $\lambda = \frac{\ell}{i}$

$E_{0,05}$ : 5º percentil del módulo de elasticidad

$f_{c,0,k}$ : resistencia característica a compresión paralela a la fibra



## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

$k_c$  depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

		Coníferas y chopo											Fronzosas								
		C14	C16	C18	C20	C22	C24	C27	C30	C35	C40	C45	C50	D18	D24	D30	D35	D40	D50	D60	D70
Propiedades de resistencia (en N/mm <sup>2</sup> )																					
Flexión	$f_{m,k}$	14	16	18	20	22	24	27	30	35	40	45	50	18	24	30	35	40	50	60	70
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8	10	11	12	13	14	16	18	21	24	27	30	11	14	18	21	24	30	36	42
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	29	18	21	23	25	26	29	32	34
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	7,5	7,8	8,0	8,1	8,3	9,3	10,5	13,5
Cortante	$f_{v,k}$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	3,4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	5,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm <sup>2</sup> )																					
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7	8	9	9,5	10	11	11,5	12	13	14	15	16	9,5	10	11	12	13	14	17	20
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7	5,4	6,0	6,4	6,7	7,4	7,7	8,0	8,7	9,4	10,0	10,7	8	8,5	9,2	10,1	10,9	11,8	14,3	16,8
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23	0,27	0,30	0,32	0,33	0,37	0,38	0,40	0,43	0,47	0,50	0,53	0,63	0,67	0,73	0,80	0,86	0,93	1,13	1,33
Módulo medio de cortante	$G_{medio}$	0,44	0,5	0,56	0,59	0,63	0,69	0,72	0,75	0,81	0,88	0,94	1,00	0,59	0,62	0,69	0,75	0,81	0,88	1,06	1,25
Densidad (en kg/m <sup>3</sup> )																					
Densidad	$\rho_k$	290	310	320	330	340	350	370	380	400	420	440	460	475	485	530	540	550	620	700	900
Densidad media	$\rho_{medio}$	350	370	380	390	410	420	450	460	480	500	520	550	570	580	640	650	660	750	840	1080

NOTA 1 Los valores dados en esta tabla para la resistencia a tracción, resistencia a compresión, resistencia a cortante, 5% percentil del módulo de elasticidad, módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra y módulo de cortante se han calculado utilizando las ecuaciones dadas en el anexo A.

NOTA 2 Las propiedades relacionadas en esta tabla son aplicables a la madera que presente un contenido de humedad que corresponde a una temperatura de 20 °C y una humedad relativa del 65%.

NOTA 3 Es probable que la madera perteneciente a las clases C45 y C50 no esté fácilmente disponible.

NOTA 4 Los valores característicos de resistencia a cortante son para madera sin firmas, de acuerdo a la Norma EN 408. El efecto de las firmas debería tenerse en cuenta en las normas de diseño.

EN 338:2009

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

$k_c$  depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

Tabla 6.1 Valores del factor de pandeo  $\chi_c$  ( $\chi_{c,y}$  o  $\chi_{c,z}$ ), para las diferentes clases resistentes de madera maciza y laminada encolada, en función de la esbeltez mecánica y de la clase resistente

Clase Resistente	Esbeltez mecánica de la pieza																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
C14	0,98	0,93	0,86	0,74	0,60	0,48	0,39	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,09	0,08	0,08	0,07
C16	0,99	0,94	0,87	0,77	0,64	0,51	0,41	0,34	0,28	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07
C18	0,99	0,94	0,88	0,78	0,65	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C20	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,54	0,43	0,35	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C22	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C24	0,99	0,95	0,89	0,80	0,68	0,55	0,45	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08
C27	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,57	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C30	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,44	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C35	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,45	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C40	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,56	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C45	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09
C50	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,09	0,09

C.T.E.-D.B.-S.E.-M, 2009

$$\lambda: \text{esbeltez mecánica: } \lambda = \frac{\ell}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

$k_c$  depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

Esbeltez mecánica de la pieza  $\lambda = l/i$

CR	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
D18	1,00	0,96	0,92	0,85	0,76	0,65	0,54	0,45	0,37	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
D24	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,41	0,35	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,14	0,13	0,12	0,10	0,09
D30	1,00	0,96	0,90	0,83	0,72	0,60	0,50	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
D35	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
D40	1,00	0,96	0,91	0,84	0,74	0,62	0,52	0,43	0,36	0,30	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
D50	1,00	0,96	0,91	0,83	0,73	0,61	0,50	0,42	0,35	0,29	0,25	0,21	0,19	0,16	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09
D60	1,00	0,96	0,92	0,85	0,76	0,65	0,54	0,45	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
D70	1,00	0,97	0,93	0,87	0,79	0,69	0,58	0,49	0,41	0,35	0,30	0,26	0,22	0,20	0,17	0,16	0,14	0,13	0,11

Argüelles et al., 2013

$$\lambda: \text{esbeltez mecánica: } \lambda = \frac{\ell}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



# EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

## 1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

$k_c$  depende de: **CLASE RESISTENTE** (valores característicos de resistencia a compresión paralela a la fibra y del 5º percentil del módulo de elasticidad) y de la **ESBELTEZ MECÁNICA**

CR	Esbeltez mecánica de la pieza $\lambda = l/i$																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
GL20h	1,00	0,98	0,96	0,92	0,85	0,74	0,62	0,51	0,42	0,35	0,30	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,14	0,12	0,11
GL22h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,47	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL24h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,82	0,70	0,57	0,47	0,39	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10
GL26h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,82	0,70	0,57	0,47	0,39	0,32	0,27	0,24	0,20	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL28h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,48	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL30h	1,00	0,98	0,95	0,91	0,83	0,71	0,58	0,48	0,39	0,33	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
GL32h	1,00	0,98	0,96	0,91	0,84	0,72	0,60	0,49	0,41	0,34	0,29	0,25	0,21	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11
GL20c	1,00	0,97	0,94	0,87	0,75	0,61	0,49	0,39	0,32	0,27	0,23	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
GL22c	1,00	0,98	0,95	0,90	0,80	0,67	0,54	0,44	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
GL24c	1,00	0,98	0,95	0,90	0,80	0,67	0,54	0,44	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10
GL26c	1,00	0,98	0,95	0,89	0,79	0,66	0,53	0,43	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09
GL28c	1,00	0,98	0,94	0,89	0,78	0,64	0,52	0,42	0,34	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09
GL30c	1,00	0,98	0,94	0,89	0,78	0,64	0,52	0,42	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09
GL32c	1,00	0,97	0,94	0,88	0,77	0,63	0,51	0,41	0,34	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09

# EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )



RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )

2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de  $k_c$

Se basa en la simulación numérica de pilares con determinadas propiedades mecánicas e imperfecciones geométricas, excentricidad de la carga, curvatura del pilar, defectos basados en la observación de piezas reales y comportamiento plástico a compresión. Para cada pieza se determina la carga última mediante un análisis de 2º orden y considerando la plasticidad del material.

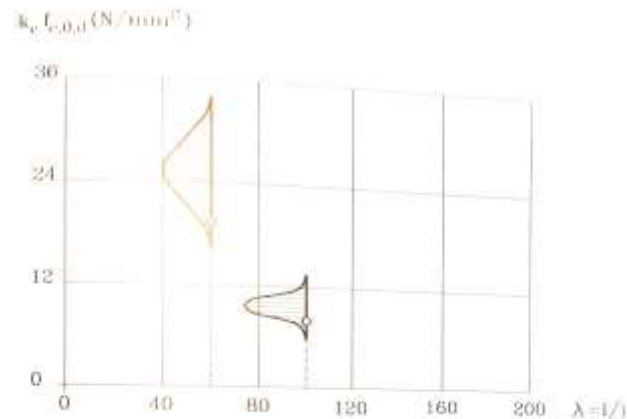
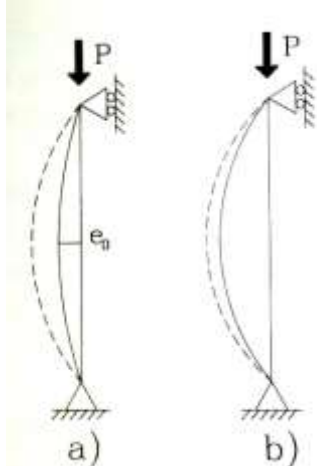


Figura I.5. Distribución de resistencias para cada esbeltez.

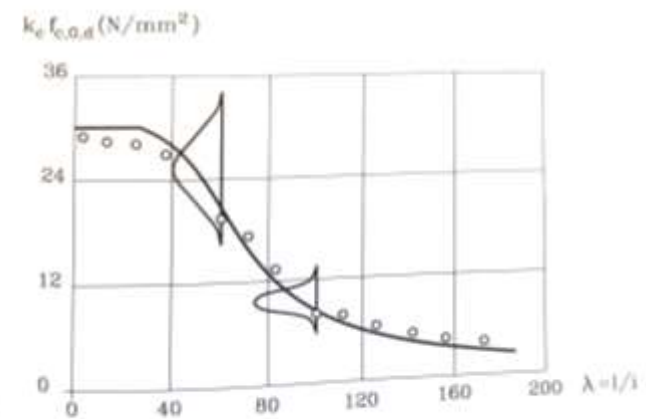


Figura I.6. Curva de pandeo.

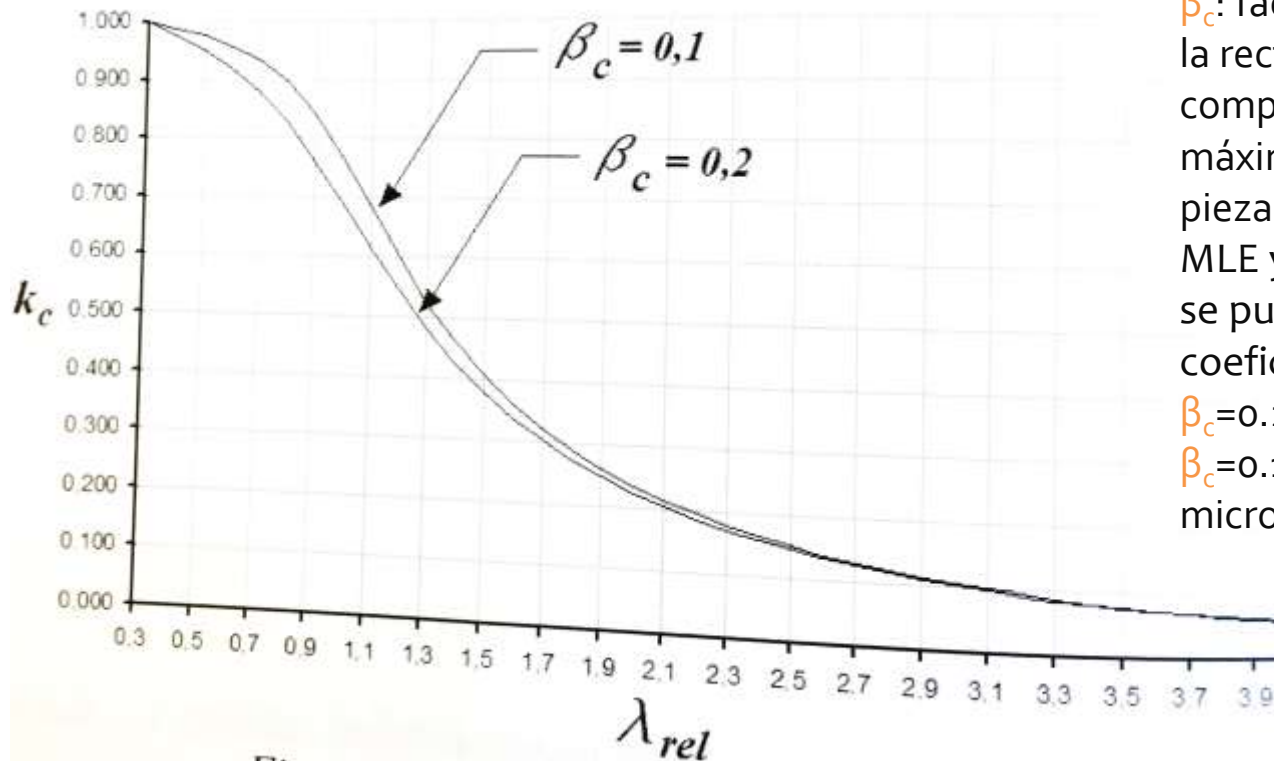
(Argüelles et al., 2013)

Se realizan muchas simulaciones de pilares con la **misma esbeltez y C.R.**, se obtiene un conjunto de **cargas últimas** y se determina el valor característico.

Con **diferentes valores de esbeltez**, se generan las CURVAS DE PANDEO.

Para simplificar su determinación, se han adoptado **expresiones matemáticas que se ajustan a esta curva** y que toman la forma de las ecuaciones empleadas en el EC-3 para el cálculo de pilares de acero.

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de  $k_c$ 

$\beta_c$ : factor asociado a la desviación de la rectitud ideal de la pieza comprimida. Cuando la desviación máxima, medida en el centro de una pieza entre apoyos es  $< \ell/500$  para MLE y  $< \ell/300$  para madera maciza, se pueden asumir los siguientes coeficientes:

$\beta_c = 0,2$  en madera maciza

$\beta_c = 0,1$  en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

CURVAS DE PANDEO: relación entre  $k_c$  y  $\lambda_{rel}$

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de  $k_c$ 

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}}$$

$$k = 0.5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2]$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}$$

$\beta_c = 0.2$  en madera maciza;  $\beta_c = 0.1$  en M.L.E. y madera microlaminada (LVL)

$\lambda$ : esbeltez mecánica:  $\lambda = \frac{\ell}{i}$

$i$ : radio de giro:  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$E_{0,05}$ : 5º percentil del módulo de elasticidad

$f_{c,0,k}$ : resistencia característica a flexión paralela a la fibra

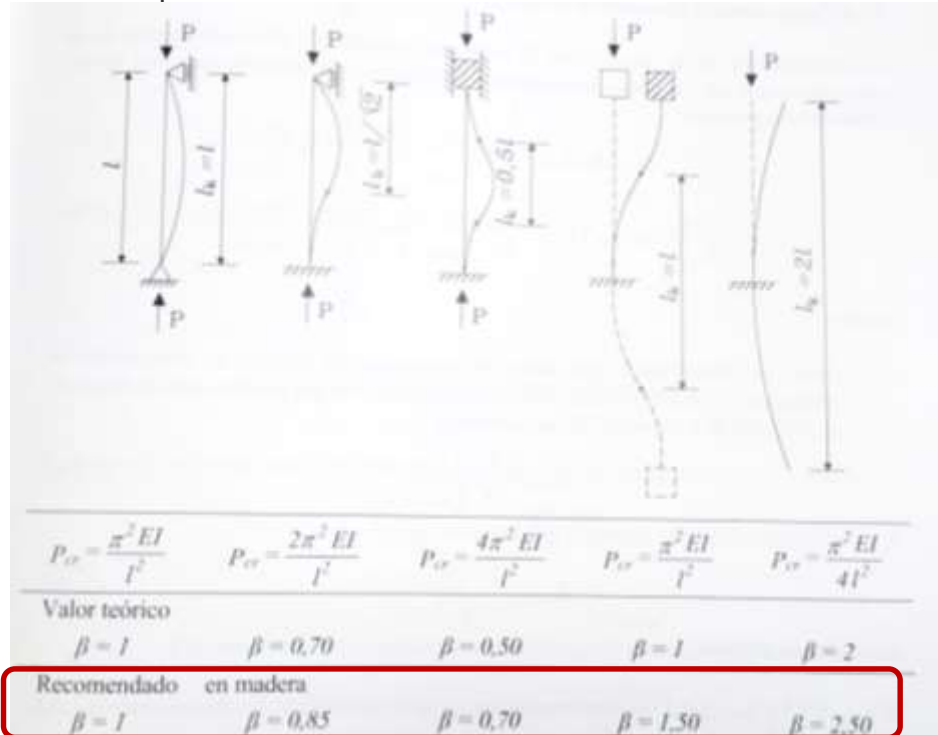
## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )1. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE INESTABILIDAD POR PANDEO ( $k_c$ )2. CURVAS DE PANDEO: Ecuaciones de determinación de  $k_c$ 

3. DETERMINACIÓN DE LAS LONGITUDES DE PANDEO

Si las condiciones de apoyo de la pieza patrón comprimida de Euler (biarticulada) varían, también varía la carga crítica de pandeo. Se define la **LONGITUD EFICAZ DE PANDEO** COMO:

$$\ell_{ef} = \ell_k = \ell \cdot \beta$$



Las uniones en madera son deformables y, por lo tanto, es difícil conseguir uniones rígidas o empotramientos. Por lo tanto, se recomienda que los coeficientes de pandeo en estructuras de madera sean un poco mayores que los valores teóricos.

(Argüelles et al., 2013)

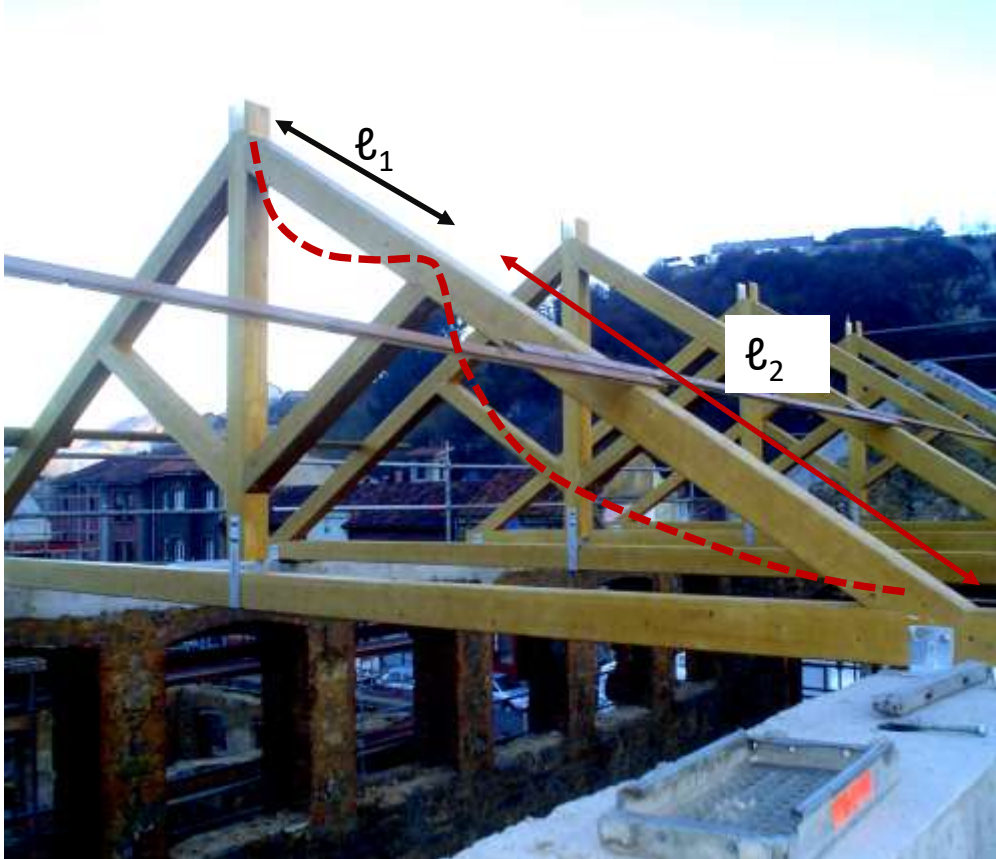


## Determinación de las longitudes de pandeo

LONGITUDES EFICACES DE PANDEO EN EL PLANO DE LA ESTRUCTURA

CERCHAS Y CELOSÍAS

Cerchas trianguladas sin cargas laterales:



$$l_{ef} = \beta \cdot l$$

$$l = l_1$$

$$l = l_2$$

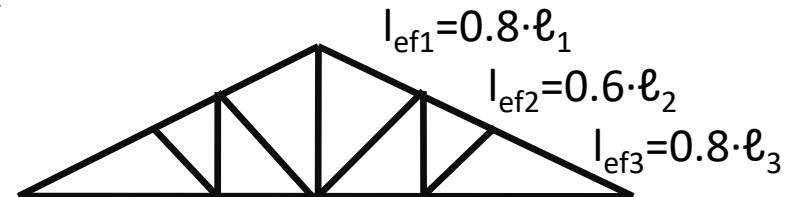
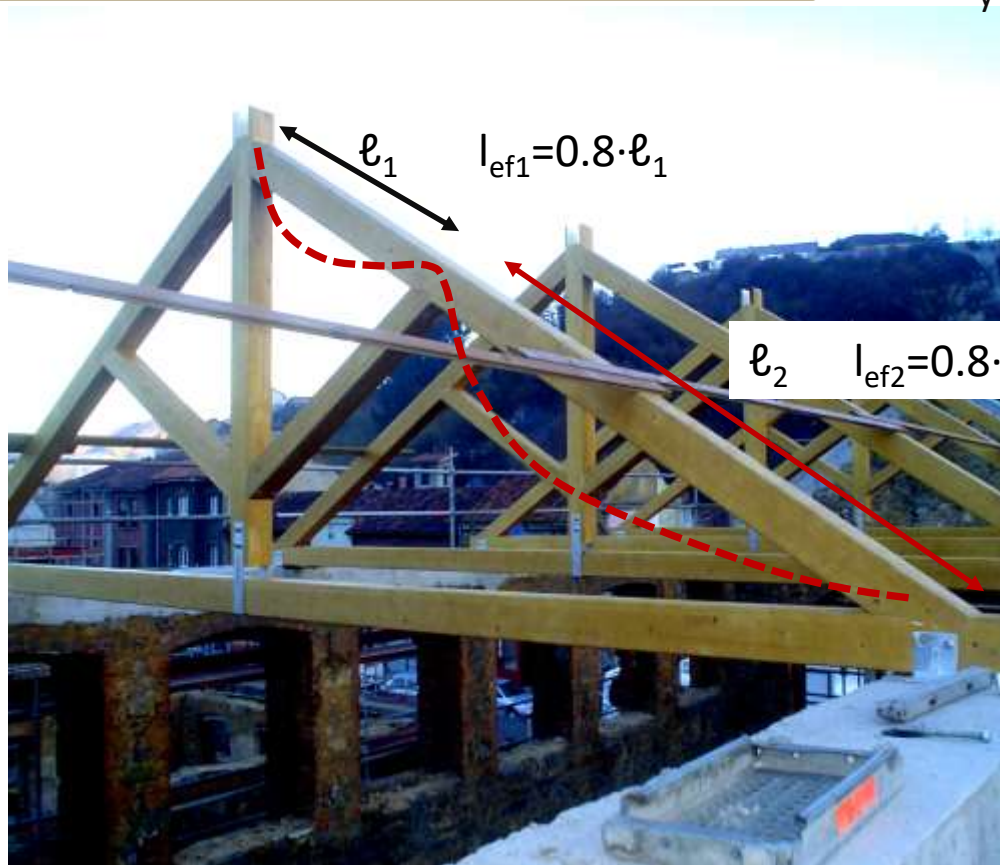
## Determinación de las longitudes de pandeo

### LONGITUDES EFICACES DE PANDEO EN EL PLANO DE LA ESTRUCTURA

#### CERCHAS Y CELOSÍAS

Cerchas con cargas transversales ( $\sigma_{m,d}$ , carga transversal  $\geq 40\% \sigma_{c,o,d}$ )  
y sin momentos significativos en los extremos:

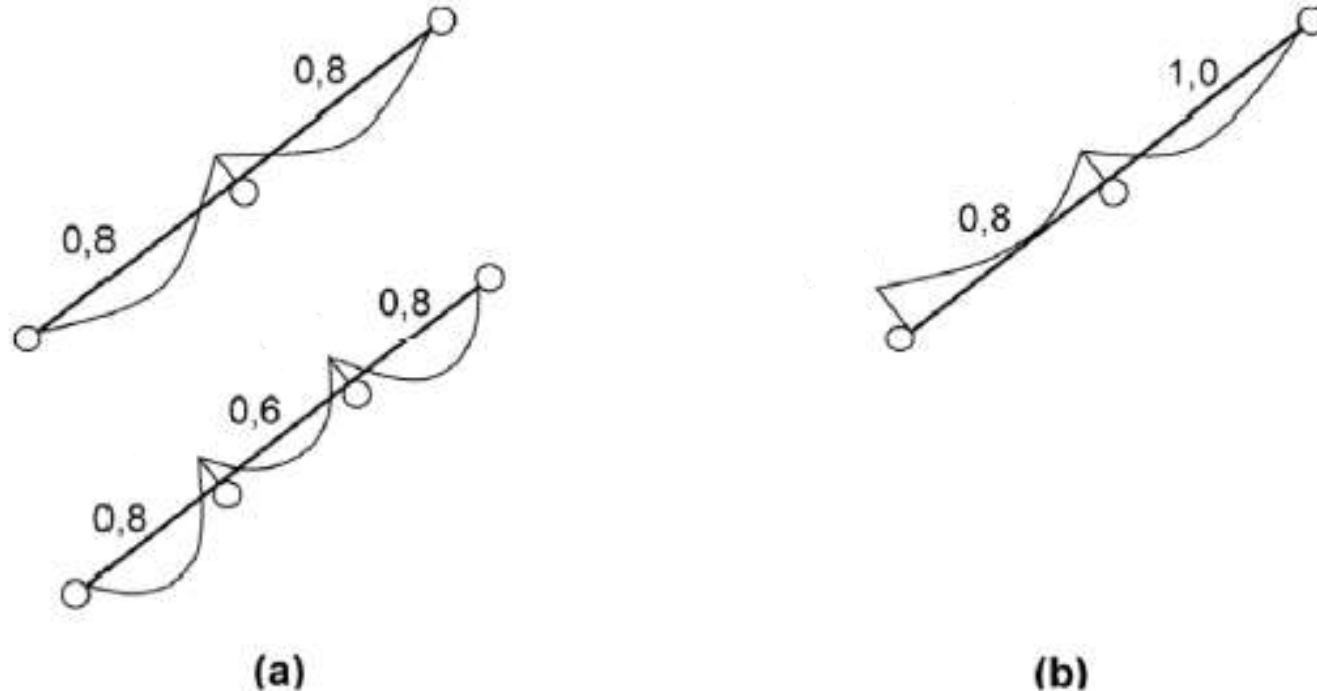
$$l_{ef} = \beta \cdot l$$



## Determinación de las longitudes de pandeo

LONGITUDES EFICACES DE PANDEO EN EL PLANO DE LA ESTRUCTURA

CERCHAS Y CELOSÍAS



**Fig. 9.3 – Diagramas de momentos flectores y longitudes eficaces en compresión (a) Momentos no significativos en los extremos (b) Momentos significativos en los extremos**

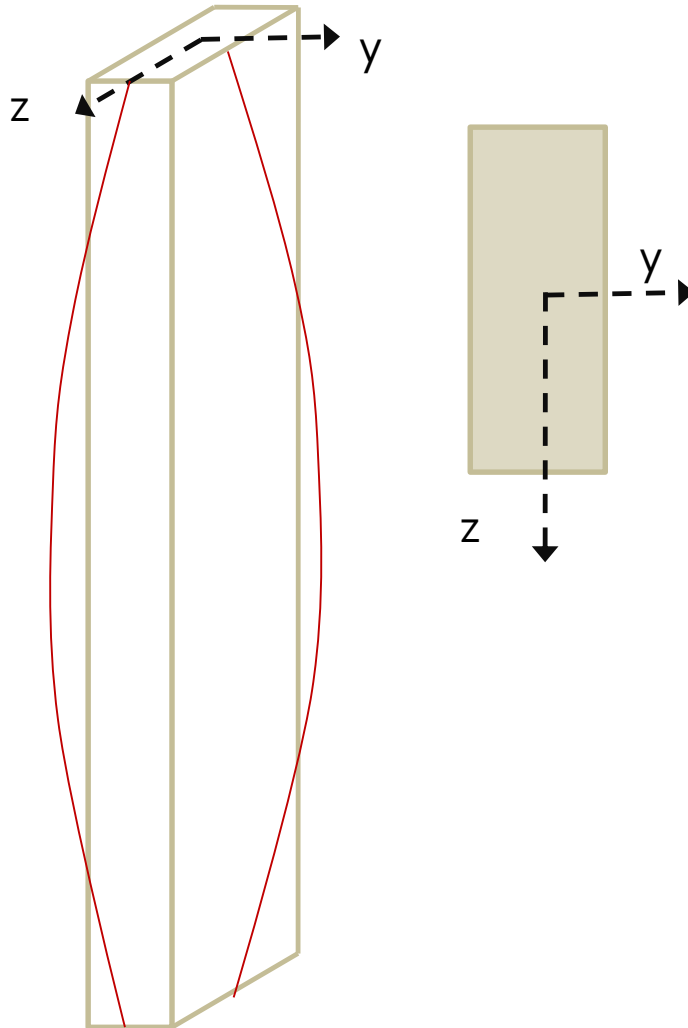
NOTA: Cuando se aplican las cargas en los nudos, en lugar de una carga distribuida, el coeficiente de pandeo es menor (0.6 en el caso de la figura 9.3).

Las resistencias para el análisis simplificado de cargas en los nudos también se reducen, limitándolo al 70%

## EUROCÓDIGO 5: Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

TENSIONES de cálculo ( $\sigma_{c,o,d}$ )RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

Pandeo en planos principales de inercia de la sección: y-y, z-z



$$k_{c,y} \cdot f_{c,o,d}$$

$$k_{c,z} \cdot f_{c,o,d}$$

## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

$$k_c = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} \quad (\text{Ec. 6.25})$$

 $k_{c,y} \cdot f_{c,o,d}$ 

$$k_y = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,y} - 0.3) + \lambda_{rel,y}^2) \quad (\text{Ec. 6.26})$$

 $\beta_c = 0.2$  en madera maciza $\beta_c = 0.1$  en M.L.E. y madera microlaminada

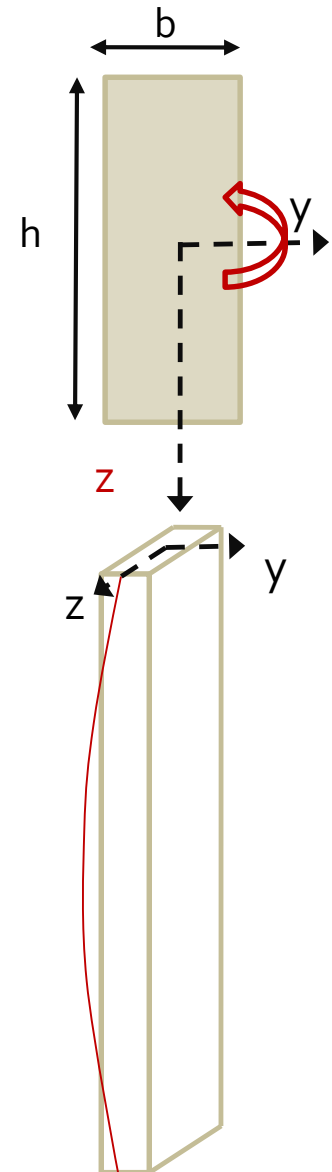
$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (\text{Ec. 6.21})$$

**\*Si  $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$  el valor de  $k_c = 1$** 

$$\lambda_y = \frac{\ell_{k,y}}{i_y} = \frac{\ell \cdot \beta_y}{0,288h}$$

$$\ell_{k,y} = \ell_{ef,y} = \ell \cdot \beta_y$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = 0,288 h$$

 $\beta_y$ : coeficiente de pandeo

## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

$$k_c = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} \quad (\text{Ec. 6.25})$$

$$k_{c,y} \cdot f_{c,o,d}$$

$$k_{c,z} \cdot f_{c,o,d}$$

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0.3) + \lambda_{rel,z}^2) \quad (\text{Ec. 6.26})$$

 $\beta_c = 0.2$  en madera maciza $\beta_c = 0.1$  en M.L.E. y madera microlaminada

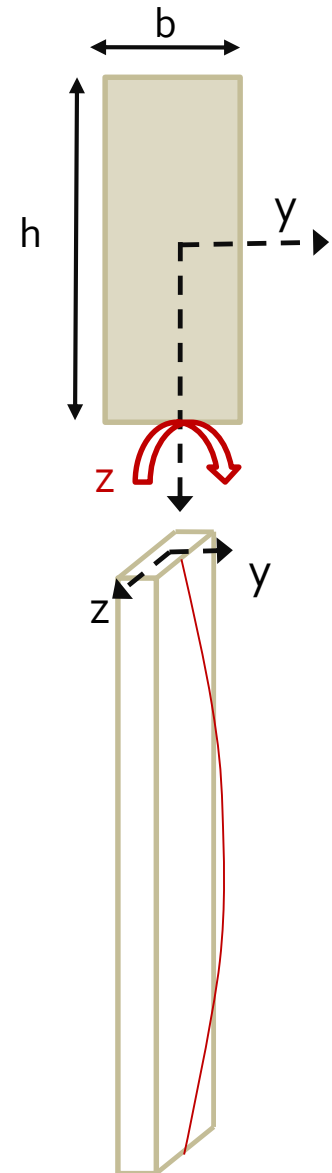
$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (\text{Ec. 6.21})$$

**\*Si  $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$  el valor de  $k_c = 1$** 

$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0,288b}$$

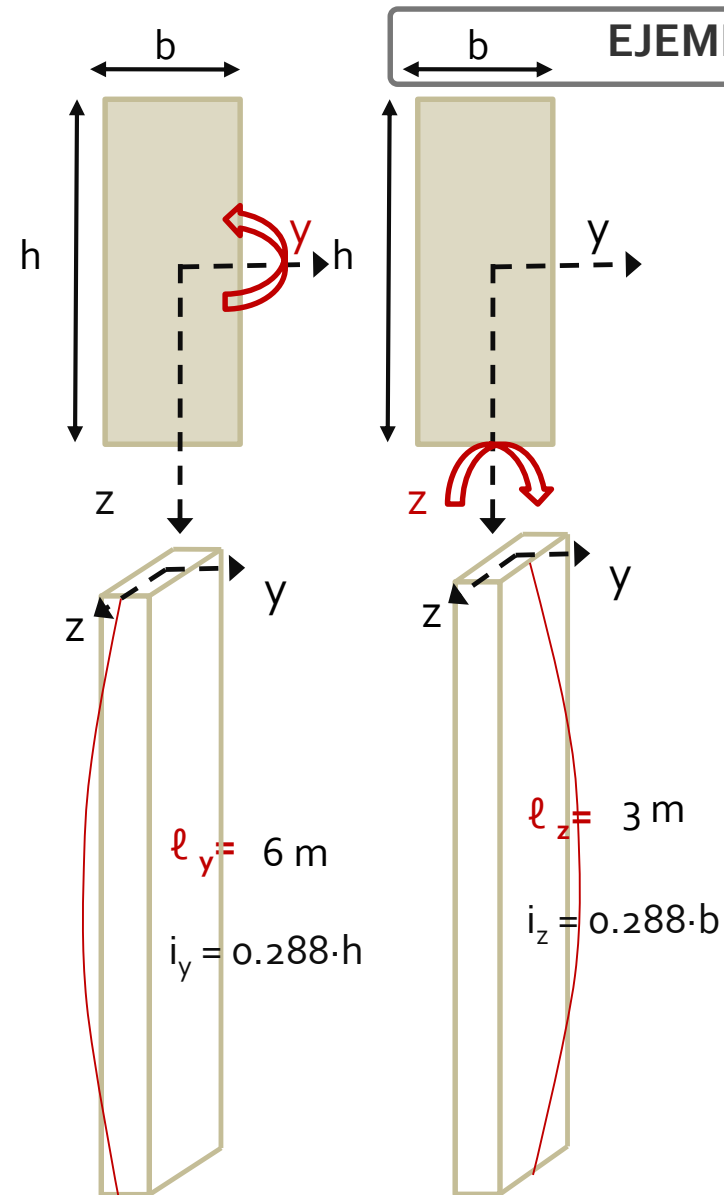
$$\ell_{k,z} = \ell_{ef,z} = \ell \cdot \beta_z$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{h b^3 / 12}{b h}} = 0,288 b$$

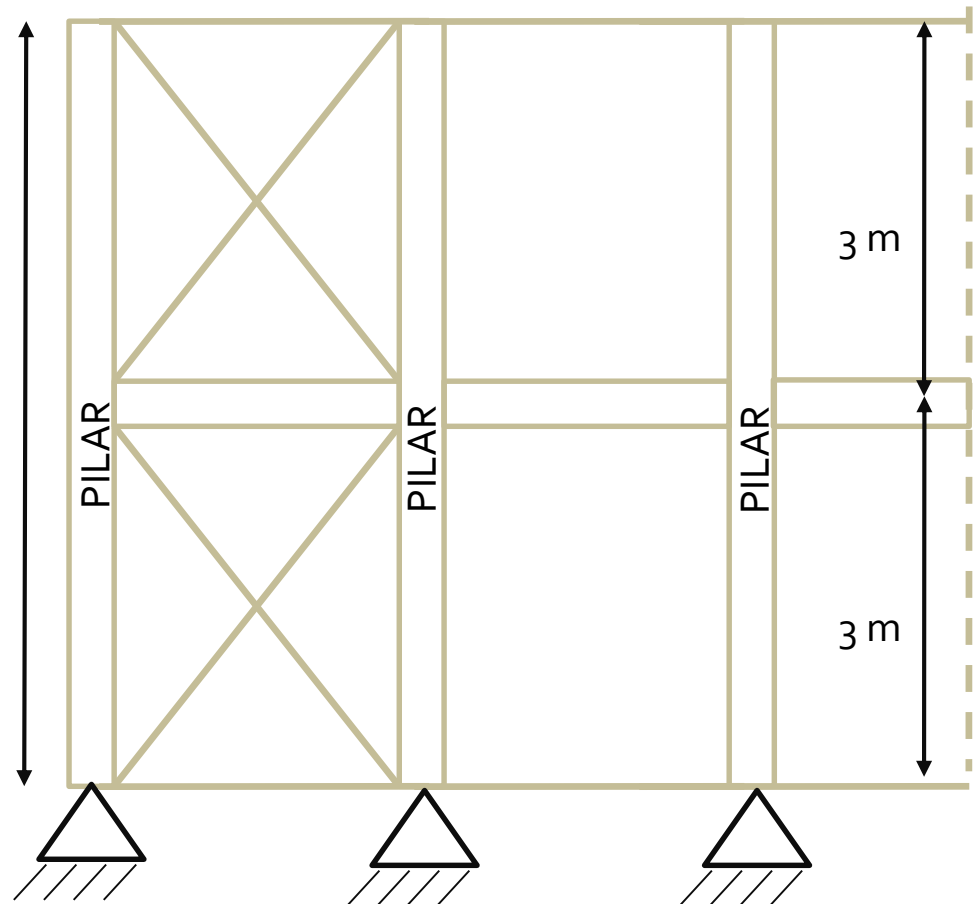
 $\beta_z$ : coeficiente de pandeo

Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión: ejemplo  $I_{ef}$ 

EJEMPLO:

RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )

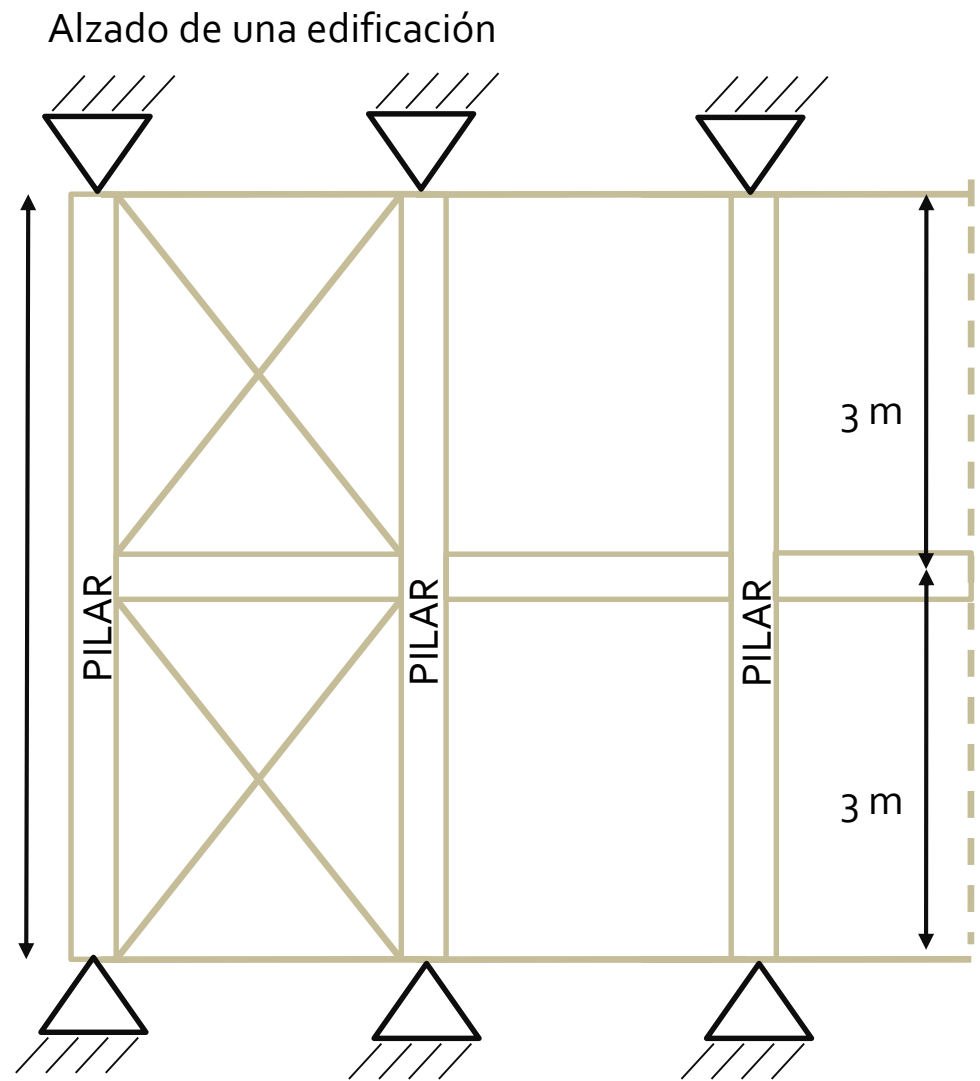
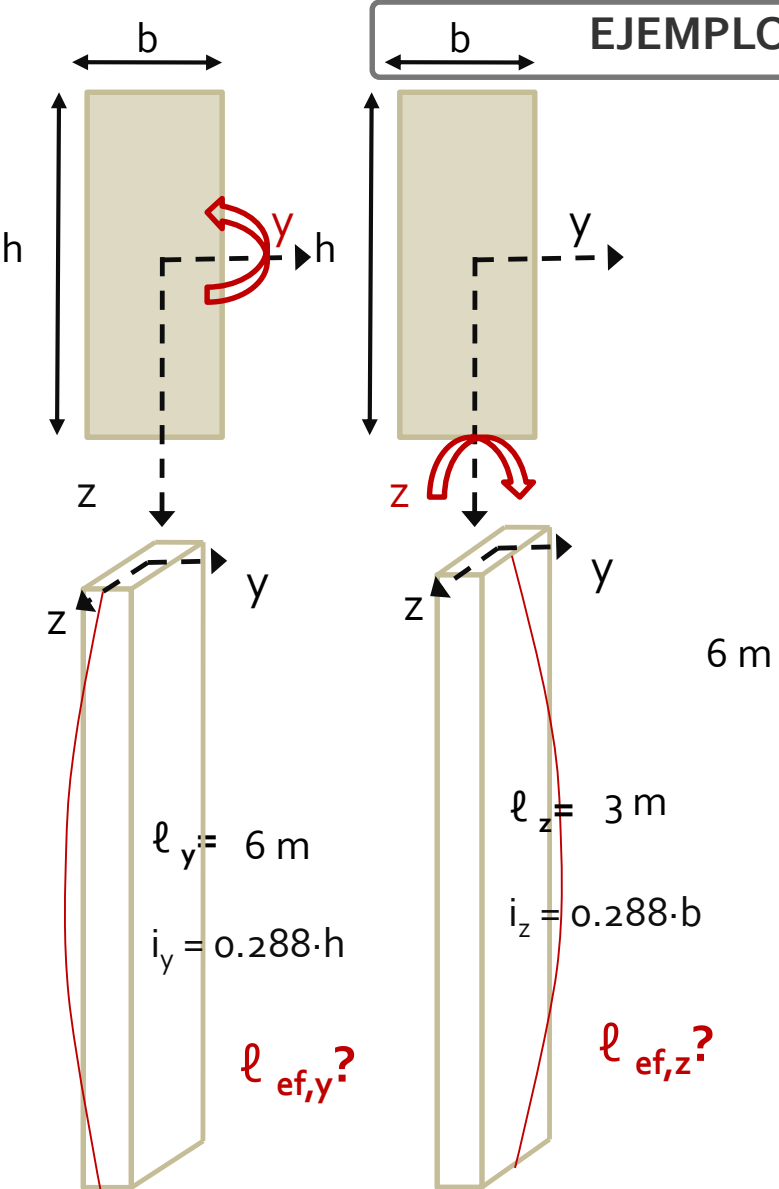
Alzado de una edificación



Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión: ejemplo  $l_{ef}$

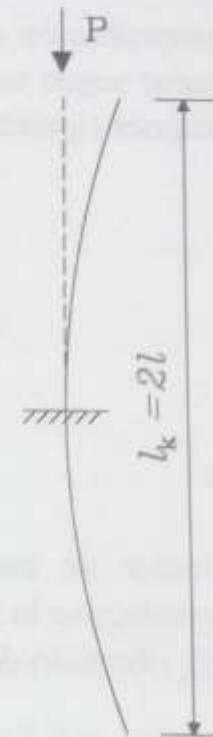
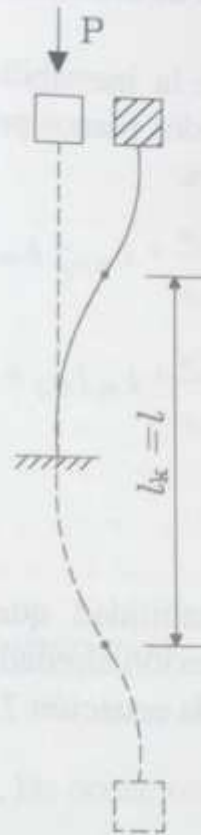
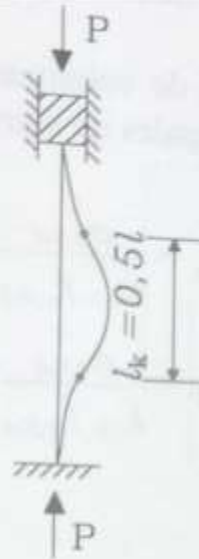
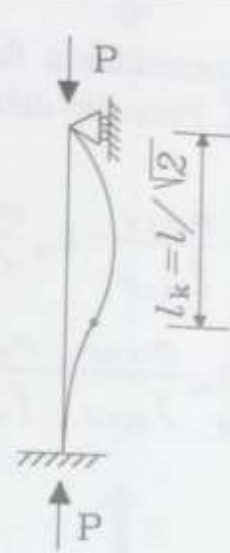
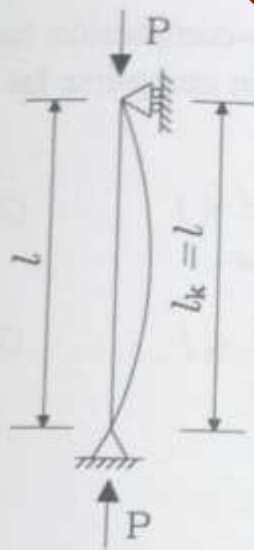
EJEMPLO:

RESISTENCIAS de cálculo ( $k_c \cdot f_{c,o,d}$ )





## 6.5. INESTABILIDAD EN PILARES COMPRIMIDOS



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Valor teórico

$$\beta = 1$$

$$\beta = 0,70$$

$$\beta = 0,50$$

$$\beta = 1$$

$$\beta = 2$$

Recomendado en madera

$$\beta = 1$$

$$\beta = 0,85$$

$$\beta = 0,70$$

$$\beta = 1,50$$

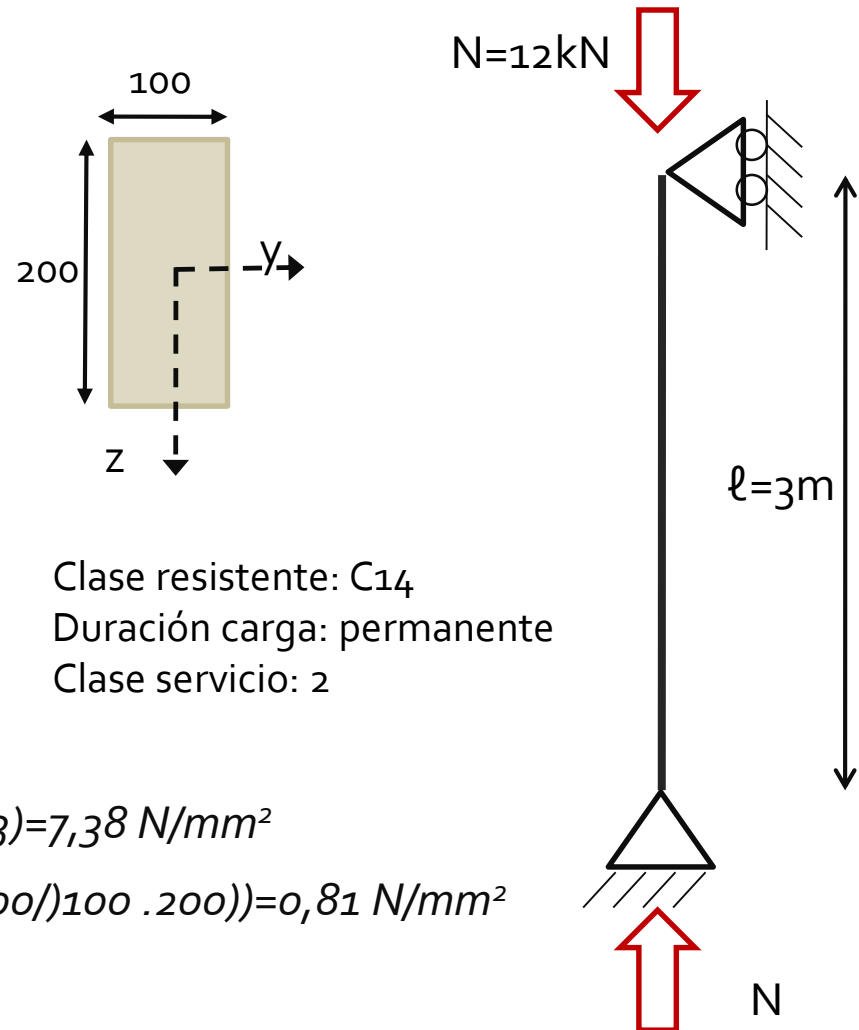
$$\beta = 2,50$$

## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm <sup>2</sup> )		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm <sup>2</sup> )		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	$G_{medio}$	0,44
Densidad (en kg/m <sup>3</sup> )		
Densidad	$\rho_k$	290
Densidad media	$\rho_{medio}$	350



Clase resistente: C14

Duración carga: permanente

Clase servicio: 2

$$f_{c,o,d} = 0,6(16/1,3) = 7,38 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{c,o,d} = 1,35(12000/(100 \cdot 200)) = 0,81 \text{ N/mm}^2$$

 $k_c$ 

N

## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

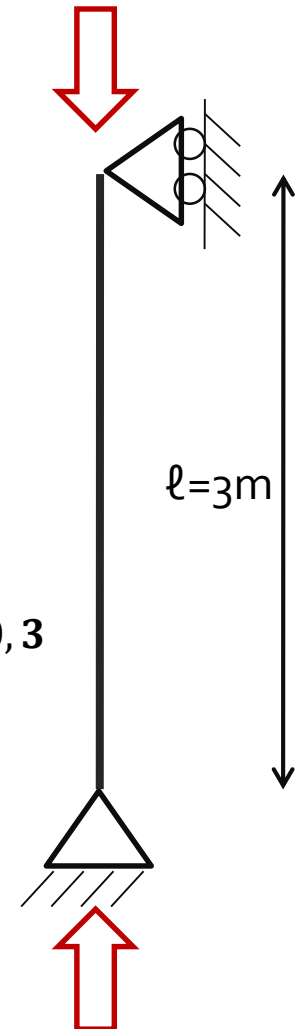
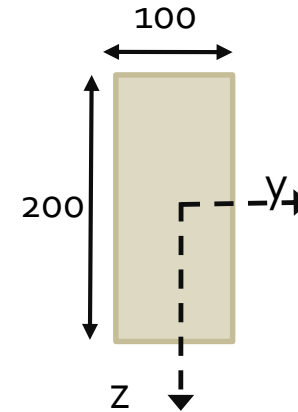
EJEMPLO:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm <sup>2</sup> )		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm <sup>2</sup> )		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	$G_{medio}$	0,44
Densidad (en kg/m <sup>3</sup> )		
Densidad	$\rho_k$	290
Densidad media	$\rho_{medio}$	350

$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0,288b} = \frac{3000 \cdot 1}{28,8} = 104,2$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = \frac{104,2}{\pi} \sqrt{\frac{16}{4700}} = 1,93 > 0,3$$



## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO 3:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

$$\lambda_z = 104; \text{C. R.} = \text{C14} \Rightarrow k_c = 0,24$$

Tabla 6.1 Valores del factor de pandeo  $\chi_c$  ( $\chi_{c,y}$  o  $\chi_{c,z}$ ), para las diferentes clases resistentes de madera maciza y laminada encolada, en función de la esbeltez mecánica y de la clase resistente

Clase Resistente	Esbeltez mecánica de la pieza																		
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
C14	0,98	0,93	0,86	0,74	0,60	0,48	0,39	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,09	0,08	0,08	0,07
C16	0,99	0,94	0,87	0,77	0,64	0,51	0,41	0,34	0,28	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07
C18	0,99	0,94	0,88	0,78	0,65	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,15	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C20	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,54	0,43	0,35	0,29	0,25	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C22	0,99	0,94	0,88	0,78	0,66	0,53	0,43	0,35	0,29	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C24	0,99	0,95	0,89	0,80	0,68	0,55	0,45	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08
C27	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,57	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C30	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,44	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C35	0,99	0,95	0,88	0,79	0,67	0,55	0,45	0,36	0,30	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
C40	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,56	0,46	0,38	0,31	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
C45	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09
C50	0,99	0,95	0,89	0,81	0,69	0,57	0,47	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,09	0,09

C.T.E.-D.B.-S.E.-M, 2009

## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

## EJEMPLO 3:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

		C14
Propiedades de resistencia (en N/mm <sup>2</sup> )		
Flexión	$f_{m,k}$	14
Tracción paralela a la fibra	$f_{t,0,k}$	8
Tracción perpendicular a la fibra	$f_{t,90,k}$	0,4
Compresión paralela a la fibra	$f_{c,0,k}$	16
Compresión perpendicular a la fibra	$f_{c,90,k}$	2,0
Cortante	$f_{v,k}$	3,0
Propiedades de rigidez (en kN/mm <sup>2</sup> )		
Módulo de elasticidad medio paralelo a la fibra	$E_{0,medio}$	7
Módulo de elasticidad paralelo a la fibra (5% percentil)	$E_{0,05}$	4,7
Módulo de elasticidad medio perpendicular a la fibra	$E_{90,medio}$	0,23
Módulo medio de cortante	$G_{medio}$	0,44
Densidad (en kg/m <sup>3</sup> )		
Densidad	$\rho_k$	290
Densidad media	$\rho_{medio}$	350

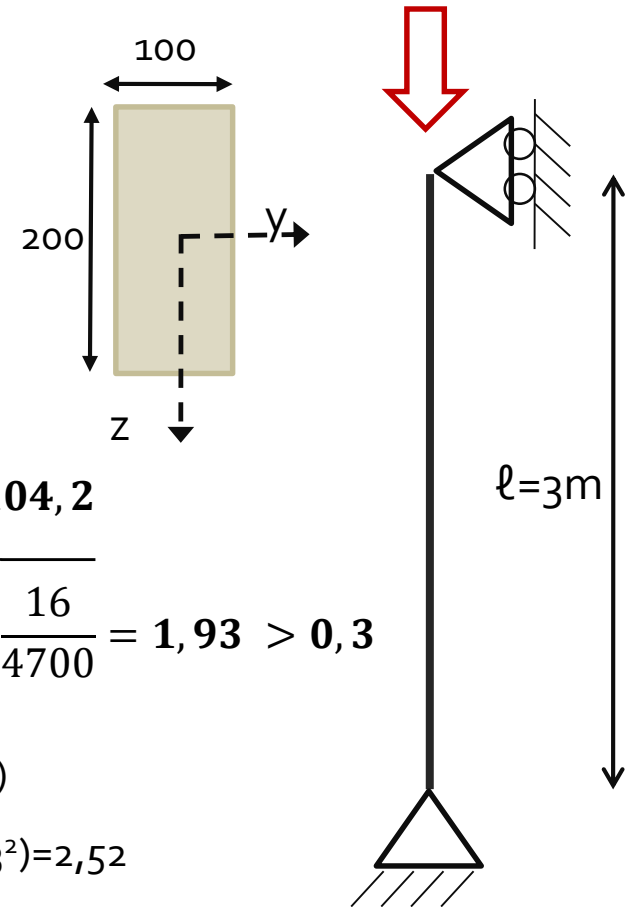
$$\lambda_z = \frac{\ell_{k,z}}{i_z} = \frac{\ell \cdot \beta_z}{0,288b} = \frac{3000 \cdot 1}{28,8} = 104,2$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = \frac{104,2}{\pi} \sqrt{\frac{16}{4700}} = 1,93 > 0,3$$

$$k_z = 0,5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0,3)) + \lambda_{rel,z}^2$$

$$k_z = 0,5 \cdot (1 + 0,2 \cdot (1,93 - 0,3)) + 1,93^2 = 2,52$$

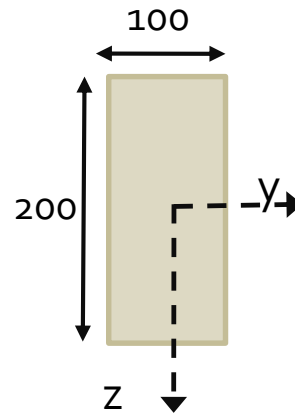
$$k_c = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel}^2}} = \frac{1}{2,52 + \sqrt{2,52^2 - 1,93^2}} = 0,241$$



## Comprobación a pandeo en pilares simples a compresión

EJEMPLO 3:

$$(\sigma_{c,o,d}) \leq (k_c \cdot f_{c,o,d})$$

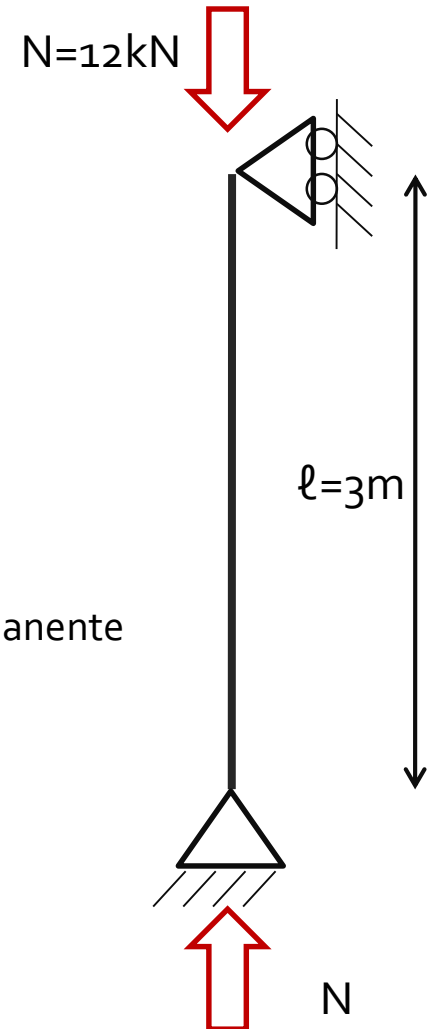


Clase resistente: C14  
 Duración carga: permanente  
 Clase servicio: 2

$$(\sigma_{c,o,d} = 0,81 \text{ N/mm}^2) \leq (k_c = 0,241) \cdot (f_{c,o,d} = 7,38 \text{ N/mm}^2)$$

$$0,81 < 1,78$$

**0,45 < 1: CUMPLE A PANDEO**



1. Introducción

2. Comprobación a pandeo en pilares simples

3. Recomendaciones de diseño de pilares

compuestos

**Estructuras de madera**  
6.5. Inestabilidad: pandeo a  
compresión



## Pilares compuestos

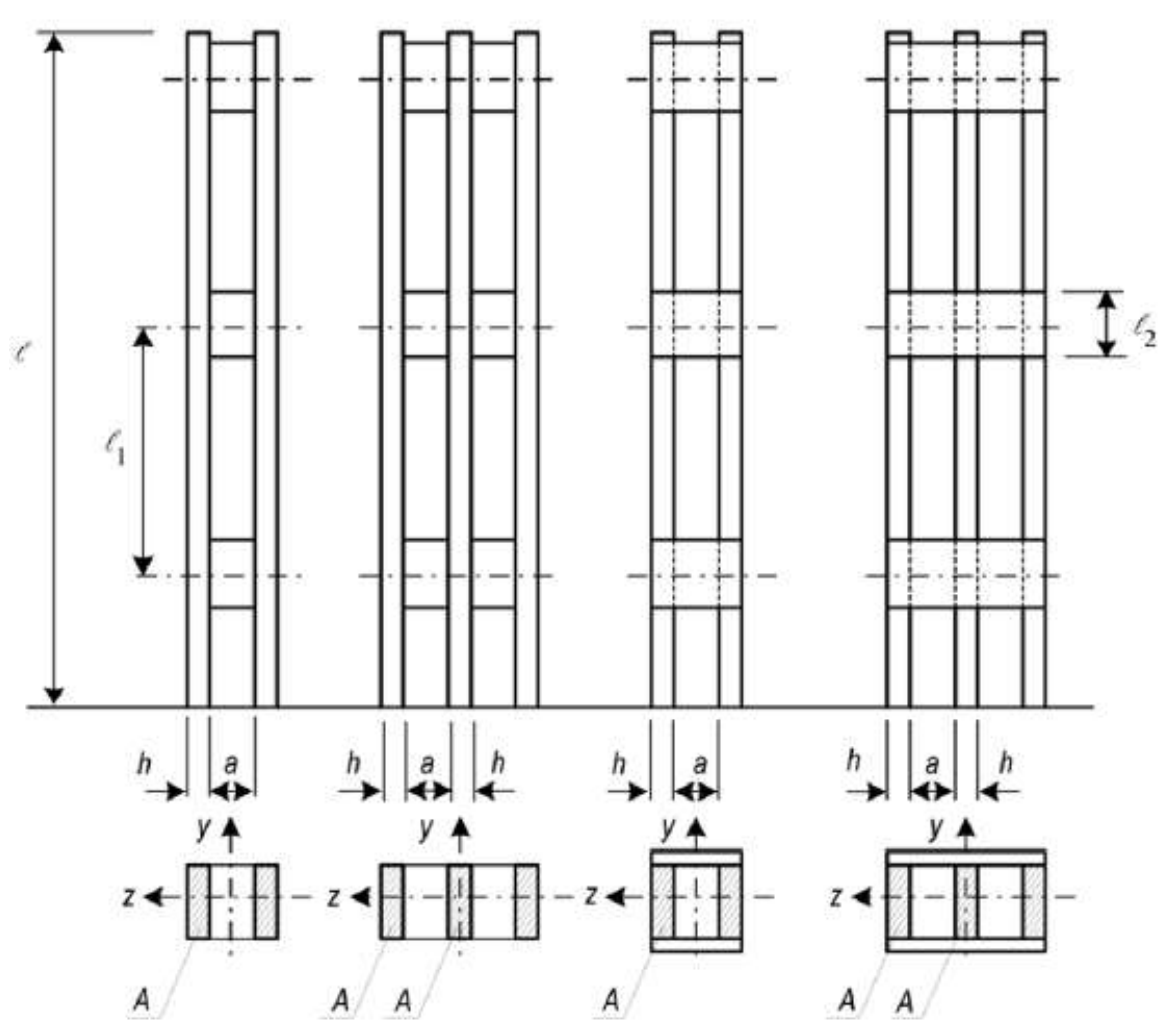
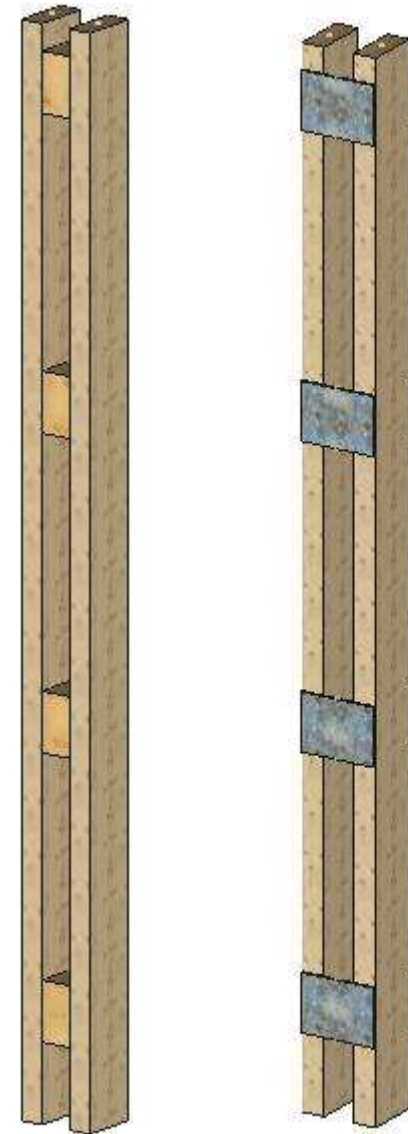


Fig. C.1 – Columnas compuestas





## Pilares compuestos

## HIPÓTESIS DE PARTIDA:

1. Sección transversal compuesta por 2, 3 ó 4 cordones iguales
2. Sección transversal simétrica con respecto a ambos ejes
3. Al menos 3 vanos entre conectores (conectados en extremos y en los tercios de la longitud)
4. Separadores:  $a \leq 3 \cdot h$ ; Presillas:  $a \leq 6 \cdot h$
5. Longitud del separador:  $l_2/a \geq 1.5$ ; Longitud de presillas:  $l_2/a \geq 2$
6. Mínimo de 4 clavos o dos pernos con conectores en cada plano de cortante
7. Las columnas están sometidas a cargas axiales
8. Calcular las uniones, separadores y presillas

