

Multiplicación de una cadena de matrices.

October 14, 2021

Tenemos una secuencia (cadena) $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ de n matrices a multiplicar, y queremos calcular el producto

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

Podemos evaluar esta expresión utilizando el algoritmo estándar para multiplicar pares de matrices como una subrutina una vez que la hemos puesto entre paréntesis para resolver todas las ambigüedades en la forma de multiplicar las matrices. La multiplicación de matrices es asociativa, por lo que todas las formas de poner paréntesis dan el mismo producto. Un producto de matrices está completamente parentizado si se trata de una sola matriz o del producto de dos productos de matrices completamente parentizados, rodeados de paréntesis. Por ejemplo, si la cadena de matrices es $\langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$, entonces podemos poner entre paréntesis el producto $A_1 A_2 A_3 A_4$ de cinco maneras distintas:

$$\begin{aligned} &(A_1(A_2(A_3A_4))), \\ &(A_1((A_2A_3)A_4)), \\ &((A_1A_2)(A_3A_4)), \\ &((A_1(A_2A_3))A_4), \\ &(((A_1A_2)A_3)A_4), \end{aligned}$$

La forma de poner entre paréntesis una cadena de matrices tiene impacto en la cantidad de operaciones necesarias para evaluar el producto.

Podemos multiplicar dos matrices A y B sólo si son compatibles: el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B . Si A es una matriz $p \times q$ y B es una matriz $q \times r$, la matriz resultante C es una matriz $p \times r$. El tiempo de cálculo de C está dominado por el número de multiplicaciones escalares necesarias que es pqr .

Para ilustrar los diferentes costes en los que incurren las diferentes paréntesis de un producto de matrices, consideremos el problema de una cadena $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ de tres matrices. Supongamos que las dimensiones de las matrices son 10×100 , 100×5 y 5×50 , respectivamente. Si multiplicamos según los paréntesis $((A_1A_2)A_3)$, haremos $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 7500$ multiplicaciones escalares. Si en cambio multiplicamos según los paréntesis $(A_1(A_2A_3))$, haremos $100 \cdot 5 \cdot 50 + 10 \cdot 100 \cdot 50 = 75000$ multiplicaciones escalares.

Planteamos el problema de la multiplicación de la cadena de matrices como sigue: dada una cadena $\langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$ de n matrices, donde para $i = 1, 2, \dots, n$, la matriz A_i tiene dimensión $p_{i-1} \times p_i$, parentize completamente el producto $A_1 A_2 \dots A_n$ de manera que se minimice el número de multiplicaciones escalares.