

Ejercicio resuelto en clase en semana 6

1. MST-Modificaciones

Supongamos que tenemos una instancia del problema MST en un grafo G , con aristas con costos positivos y distintos. Sea T un árbol de cubrimiento de costo mínimo de esa instancia. Supongamos que creamos una nueva instancia del problema con los mismos vértices y aristas pero modificando el costo c_e de cada arista e con una de las siguientes expresiones:

1. $c_e + 2$
2. $2c_e$
3. c_e^2

Para cada una de los casos ¿ T sigue siendo un árbol de cubrimiento de costo mínimo de esa nueva instancia? Pruébalo o dé un contraejemplo.

2. Camino más corto-Modificaciones

Supongamos que tenemos una instancia del problema *Camino $s - t$ más corto* en un grafo dirigido G , con aristas con costos positivos y distintos. Sea P un camino $s - t$ de costo mínimo de esa instancia. Supongamos que creamos una nueva instancia del problema con los mismos vértices y aristas pero modificando el costo c_e de cada arista e con una de las siguientes expresiones:

1. $c_e + 2$
2. $2c_e$
3. c_e^2

Para cada una de los casos ¿ P sigue siendo un camino $s - t$ de costo mínimo de esa nueva instancia? Pruébalo o dé un contraejemplo.

3. MST-Reducciones

Resuelva los siguientes problemas reduciéndolos ¹ al problema MST.

¹Reducir el problema A al problema B significa que mediante un algoritmo que resuelve el problema B se puede “fácilmente” resolver el problema A

A. Problema del *árbol de cubrimiento de costo máximo*: entre todos los árboles de cubrimiento T de un grafo conexo con aristas con costos c_e , obtener uno que tenga máxima suma de los costos de sus aristas, $\sum_{e \in T} c_e$.

B. Problema del *árbol de cubrimiento de producto mínimo*: entre todos los árboles de cubrimiento T de un grafo conexo con aristas con costos c_e mayores que 0, obtener uno que tenga mínimo producto de los costos de sus aristas, $\prod_{e \in T} c_e$.

C. Dado un grafo $G = (V, E)$ con aristas con costos mayores que 0 obtener el conjunto de aristas F de costo mínimo tal que el grafo $(V, E \setminus F)$ sea acíclico.

4. Dijkstra-Costos negativos

Sea G un grafo dirigido con aristas con costos. Sea s uno de sus vértices, el cual no tiene aristas entrantes y sus aristas salientes pueden tener costo negativo. Todas las demás aristas tienen costo no negativo. ¿Puede el algoritmo de Dijkstra encontrar el camino más corto desde s hacia los vértices alcanzables desde s ?

5. Árbol cuello de botella

Sea G un grafo conexo con aristas con costos positivos y distintos. Sea T un árbol de cubrimiento de G . Definimos la *arista cuello de botella* de T como la arista de T de mayor costo.

Un árbol de cubrimiento T de G es *árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo* si ningún árbol de cubrimiento T' de G tiene una arista cuello de botella con menor costo que la de T .

a. ¿Es todo árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo de G un árbol de cubrimiento de costo mínimo de G ? Pruébalo o dé un contraejemplo.

b. ¿Es todo árbol de cubrimiento de costo mínimo de G un árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo de G ? Pruébalo o dé un contraejemplo.

6. MST-Costos diferentes

Sea G un grafo conexo con aristas con costos positivos que no son necesariamente diferentes. Supongamos que se nos da un árbol de cubrimiento T de G con la garantía de cada una de sus aristas pertenece a *algún* árbol de cubrimiento de costo mínimo de G . ¿Se puede concluir que T es un árbol de cubrimiento de costo mínimo? Pruébalo o dé un contraejemplo.