Programación 3 - 2021
9 de setiembre

1. MST-Modificaciones

Supongamos que tenemos una instancia del problema MST en un grafo G, con aristas con costos positivos y distintos. Sea T un árbol de cubrimiento de costo mínimo de esa instancia. Supongamos que creamos una nueva instancia del problema con los mismos vértices y aristas pero modificando el costo c_e de cada arista e con una de las siguientes expresiones:

1. $c_e + 2$
2. $2c_e$
3. ${c_e}^2$

Para cada una de los casos ¿T sigue siendo un árbol de cubrimiento de costo mínimo de esa nueva instancia? Pruébelo o dé un contraejemplo.

1. Sí

   Como un árbol de cubrimiento tiene n - 1 aristas el costo de cada árbol aumenta 2(n-1). Como $Costo(T) \leq Costo(T')$ si y solo si $Costo(T) + 2(n-1) \leq Costo(T') + 2(n-1)$, donde T y T' son árboles de cubrimiento, se concluye que el MST del grafo original sigue siendo MST en el grafo modificado.

2. Sí

   El costo de cada árbol se duplica. Como los costos de las aristas son positivos también lo son los costos de los árboles. Por lo tanto $Costo(T) \leq Costo(T')$ si y solo si $2\ Costo(T) \leq 2\ Costo(T')$.

3. Sí

   Como los costos de las aristas son positivos si $c_e \leq c_f$ entonces ${c_e}^2 \leq {c_f}^2$. Por lo tanto la ejecución de los algoritmos Prim y Kruskal, en los cuales las decisiones están basadas solo en la comparación de los costos de las aristas, generaría el mismo árbol con los costos originales y con los costos modificados.

   Este argumento también hubiera servido en los puntos anteriores.

2. Camino más corto-Modificaciones

Supongamos que tenemos una instancia del problema *Camino* $s - t$ *más corto* en un grafo dirigido G, con aristas con costos positivos y distintos. Sea P un camino $s - t$ de costo mínimo de esa instancia. Supongamos que creamos una nueva instancia del problema con los mismos vértices y aristas pero modificando el costo c_e de cada arista e con una de las siguientes expresiones:

1. $c_e + 2$
2. $2c_e$
3. ${c_e}^2$

Para cada una de los casos ¿P sigue siendo un camino $s - t$ de costo mínimo de esa nueva instancia? Pruébelo o dé un contraejemplo.

1. No

   Puede ocurrir que el camino de menor costo tenga más aristas que otro. De $a + b < c$ no se puede concluir $a + b + 4 < c + 2$. Ejemplo: (s,u) de costo 2, (u,t) de costo 3 y (s,t) de costo 6. El camino más corto entre s y t es (s,u,t) que tiene costo 5. Después de las modificaciones ese camino tiene costo 9 y (s,t) tiene costo 8.

2. Sí

   El costo de cada camino se duplica. Valen los mismos arguementos que con MST.

3. No

   De $c < a+b$ solo se concluye $c^2 < a^2+b^2+2ab$, pero no necesariamente $c^2 < a^2 + b^2$. Ejemplo: (s,t) de costo 4, (s,u) de costo 2 y (u,t) de costo 3. El camino más corto entre s y t es (s,t) que tiene costo 4. Después de las modificaciones ese camino tiene costo 16 y (s,u,t) tiene costo 13.

   Aunque los costos de las aristas modificadas tienen el mismo orden que las originales, a diferencia del ejercicio anterior, no se puede usar el argumento de la ejecución del algoritmo de Dijkstra porque en este algoritmo las decisiones no se basan en la comparación entre costos de aristas sino entre costos de caminos.

3. MST-Reducciones

Resuelva los siguintes problemas reduciéndolos [1] al problema MST.

A. Problema del *árbol de cubrimiento de costo máximo*: entre todos los árboles de cubrimiento T de un grafo conexo con aristas con costos c_e, obtener uno que tenga máxima suma de los costos de sus aristas, $\sum_{e \in T} c_e$.

B. Problema del *árbol de cubrimiento de producto mínimo*: entre todos los árboles de cubrimiento T de un grafo conexo con aristas con costos c_e mayores que 0, obtener uno que tenga mínimo producto de los costos de sus aristas, $\prod_{e \in T} c_e$.

C. Dado un grafo $G = (V, E)$ con aristas con costos mayores que 0 obtener el conjunto de aristas F de costo mínimo tal que el grafo $(V, E \setminus F)$ sea acíclico.

A. Las propiedades del problema MST y los algortimos no requieren que los costos de las aristas sean no negativos. Por lo tanto de puede hacer la modificación en que a cada arista se le asigna el costo opuesto al original, o sea, de c_e se pasa a $-c_e$. El costo de cada árbol pasa a ser su opuesto. Como $Costo(T) \geq Costo(T')$ en el grafo original si y solo si $Costo(T) \leq Costo(T')$ en el grafo modificado, el árbol de cubrimiento de costo máximo en el grafo original es el árbol de cubrimiento de costo mínimo en el grafo modificado.

Si asumimos costos positivos (mayores que 0) otra transformación podría ser asignar el inverso del costo a cada arista, o sea, de c_e se pasa a $1/c_e$. Si se permite costo 0 se podría considerar que su inverso es ∞.

B. El problema no es trivial. De $a+b < c+d$ no se puede concluir $ab < cd$. Por ejemplo $4 + 5 < 2 + 8$ pero $4 \cdot 5 > 2 \cdot 8$.

Como los costos son mayores que 0 se puede transformar el grafo haciendo que el costo de cada arista sea el logaritmo de su costo orginal.

De $\log \prod_{e \in T} c_e = \sum_{e \in T} \log c_e$ y como log es una función creciente se tiene que el producto de los costos de las aristas de T es menor que el de las de T' si y solo si en el grafo modificado la suma de los costos de las aristas de T es menor que el de las de T'.

C. El costo de F es mínimo si y solo si el costo de $E \setminus F$ es máximo. Además $E \setminus F$ debe ser acíclico. Como los costos de las aristas son mayores que 0 los dos requerimientos anteriores implican que $E \setminus F$ debe ser un árbol de cubrimiento de costo máximo.

Entonces, tal como en la parte A, se transforma el grafo asignando a cada arista el opuesto de su costo y se reduce al problema MST. El resultado

[1] Reducir el problema A al problema B significa que mediante un algoritmo que resuelve el problema B se puede "fácilmente" resolver el problema A

pedido, F, es el complemento del árbol obtenido.

4. Dijkstra-Costos negativos

Sea G un grafo dirigido con aristas con costos. Sea s uno de sus vértices, el cual no tiene aristas entrantes y sus aristas salientes pueden tener costo negativo. Todas las demás aristas tienen costo no negativo. ¿Puede el algoritmo de Dijkstra encontrar el camino más corto desde s hacia los vértices alcanzables desde s?

Sí.

En un paso genérico del algoritmo se elige la arista (u,v) determinando un camino desde s hasta v.. Si hubiera un camino más corto tendría que contener una arista (x,w) con $x \in S, w \in V \setminus S$. Por la regla de selección el costo del camino desde s hasta w no puede ser menor al costo del camino encontrado por el algoritmo desde s hasta v. El costo del camino desde w hasta v no puede ser negativo porque las únicas aristas de costo negativo en el grafo son salientes de s, w es distinto de s, y no hay aristas entrantes en s. Por lo tanto el costo del camino alternativo no puede ser menor que el del algoritmo.

5. Árbol cuello de botella

Sea G un grafo conexo con aristas con costos positivos y distintos. Sea T un árbol de cubrimiento de G. Definimos la *arista cuello de botella* de T como la arista de T de mayor costo.

Un árbol de cubrimiento T de G es *árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo* si ningún árbol de cubrimiento T' de G tiene una arista cuello de botella con menor costo que la de T.

a. ¿Es todo árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo de G un árbol de cubrimiento de costo mínimo de G? Pruébelo o dé un contraejemplo.

b. ¿Es todo árbol de cubrimiento de costo mínimo de G un árbol de cubrimiento de cuello de botella mínimo de G? Pruébelo o dé un contraejemplo.

a. No

Como contraejemplo sean (a,b) de costo 4, (b,c) de costo 1, (c,d) de costo 2 y (b,d) de costo 3. Todos los árboles de cubrimiento tienen la arista (a,b) que es su arista de mayor costo. Entonces todos son árboles de cubrimiento de cuello de botella mínimo (ACCBM). Pero solo {(a,b), (b,c), {c,d}} es MST.

b. Sí

Por absurdo. Sea T un MST y suponemos que no es ACCBM. Esto implica que la arista de mayor costo de T, e, no pertenece a ningún ACCBM y su costo es mayor al de cada arista de esos árboles. Sea T' un ACCBM. T' $\cup$ {e} tiene un ciclo y e tiene costo mayor que todas las aristas de T'. Entonces e es la arista de mayor costo de un ciclo. Por propiedad de ciclo e no puede pertenecer a ningún MST, en contra de la supuesto.

6. MST-Costos diferentes

Sea G un grafo conexo con aristas con costos positivos que no son necesariamente diferentes. Supongamos que se nos da un árbol de cubrimiento T de G con la garantía de cada una de sus aristas pertenece a *algún* árbol de cubrimiento de costo mínimo de G. ¿Se puede concluir que T es un árbol de cubrimiento de costo mínimo? Pruébelo o dé un contraejemplo.

No.

Como contraejemplo sean (a,b) de costo 1, (a,c) de costo 2 y (b,c) de costo 2. Hay dos MST, {(a,b), (a,c)} y {(a,b), (b,c)}, de costo 3. Si T es {(a,c), (b,c)}, cada una de sus aristas pertenece a alguno de los MST pero su costo es 4.