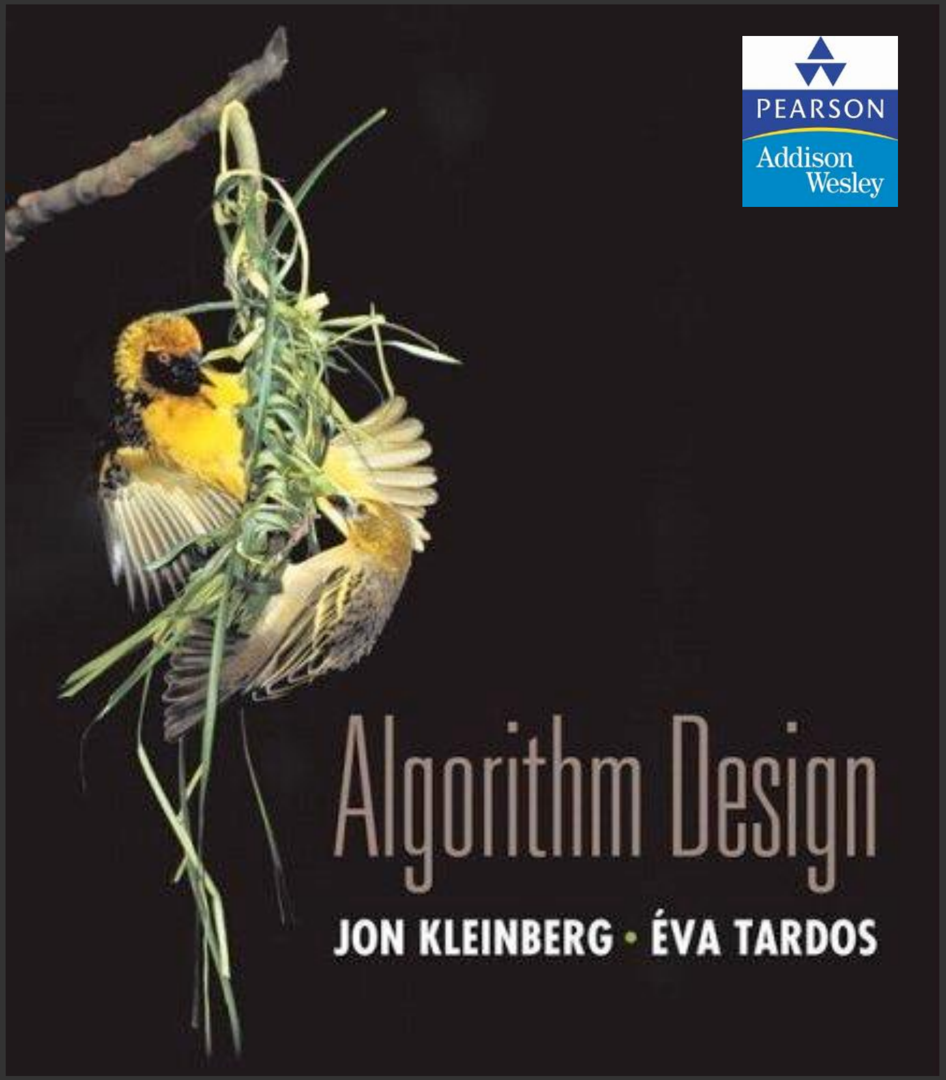


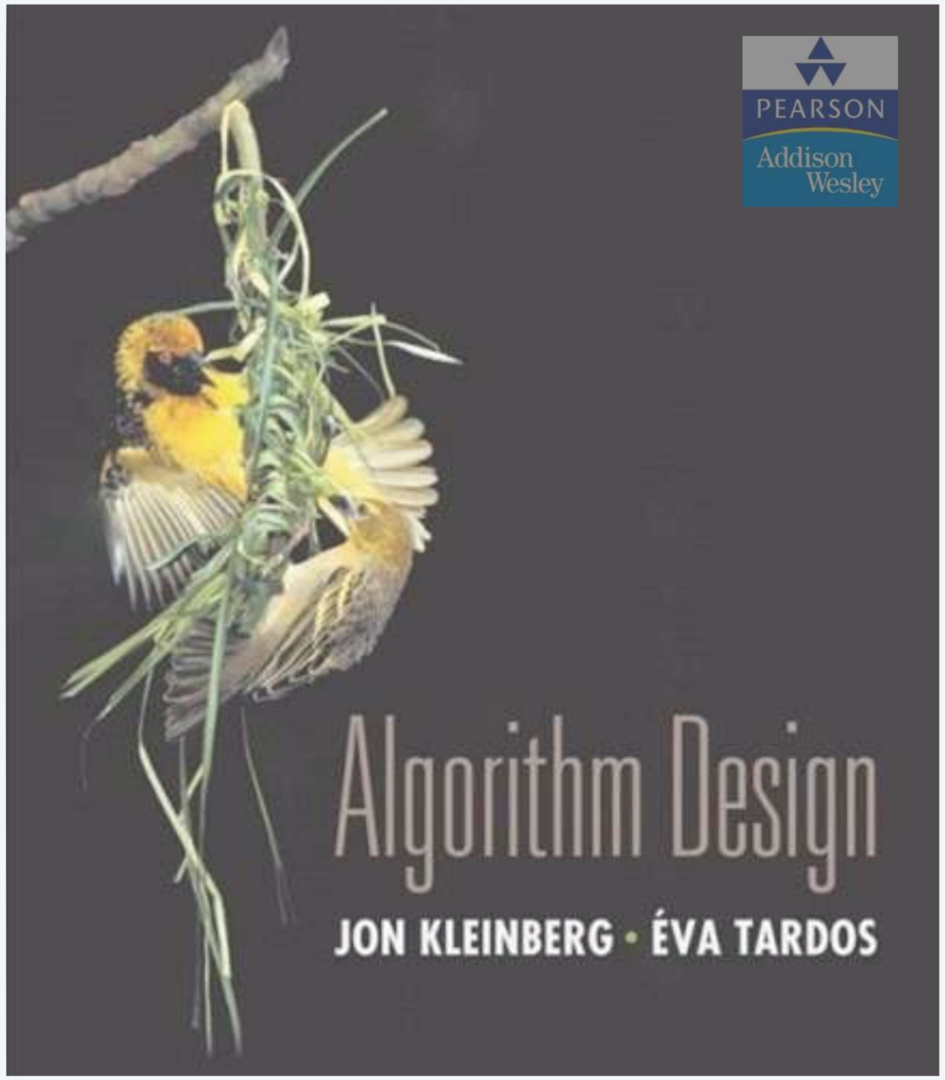
3. GRÁFOS

- *definiciones básicas y aplicaciones*
- *conectividad y recorrido de grafos*
- *comprobación de bipartición*
- *conectividad en grafos dirigidos*
- *DAGs y ordenación topológica*

Lecture slides by Kevin Wayne

http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos

Last updated on 7/29/17 6:09 PM



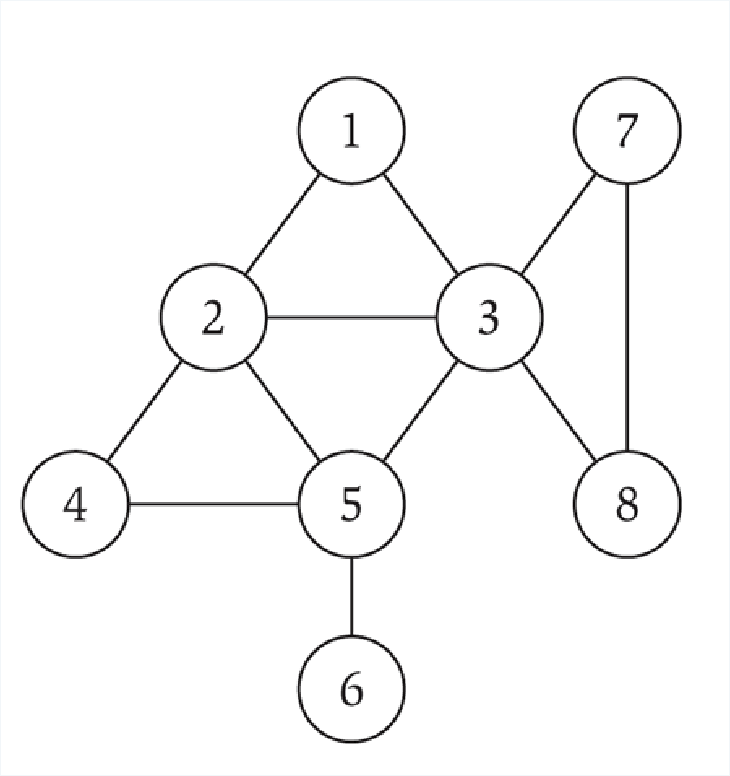
3. GRÁFICOS

- *definiciones básicas y aplicaciones*
- *conectividad de grafos y recorrido de grafos*
- *comprobación de la bipartición*
- *conectividad en grafos dirigidos*
- *DAGs y ordenación topológica*

Grafos no dirigidos

Notación. $G = (V, E)$

- V = nodos (o vértices).
- E = aristas (o arcos) entre pares de nodos.
- Captura la relación por pares entre objetos.
- Parámetros del tamaño del grafo: $n = | V |$, $m = | E |$.



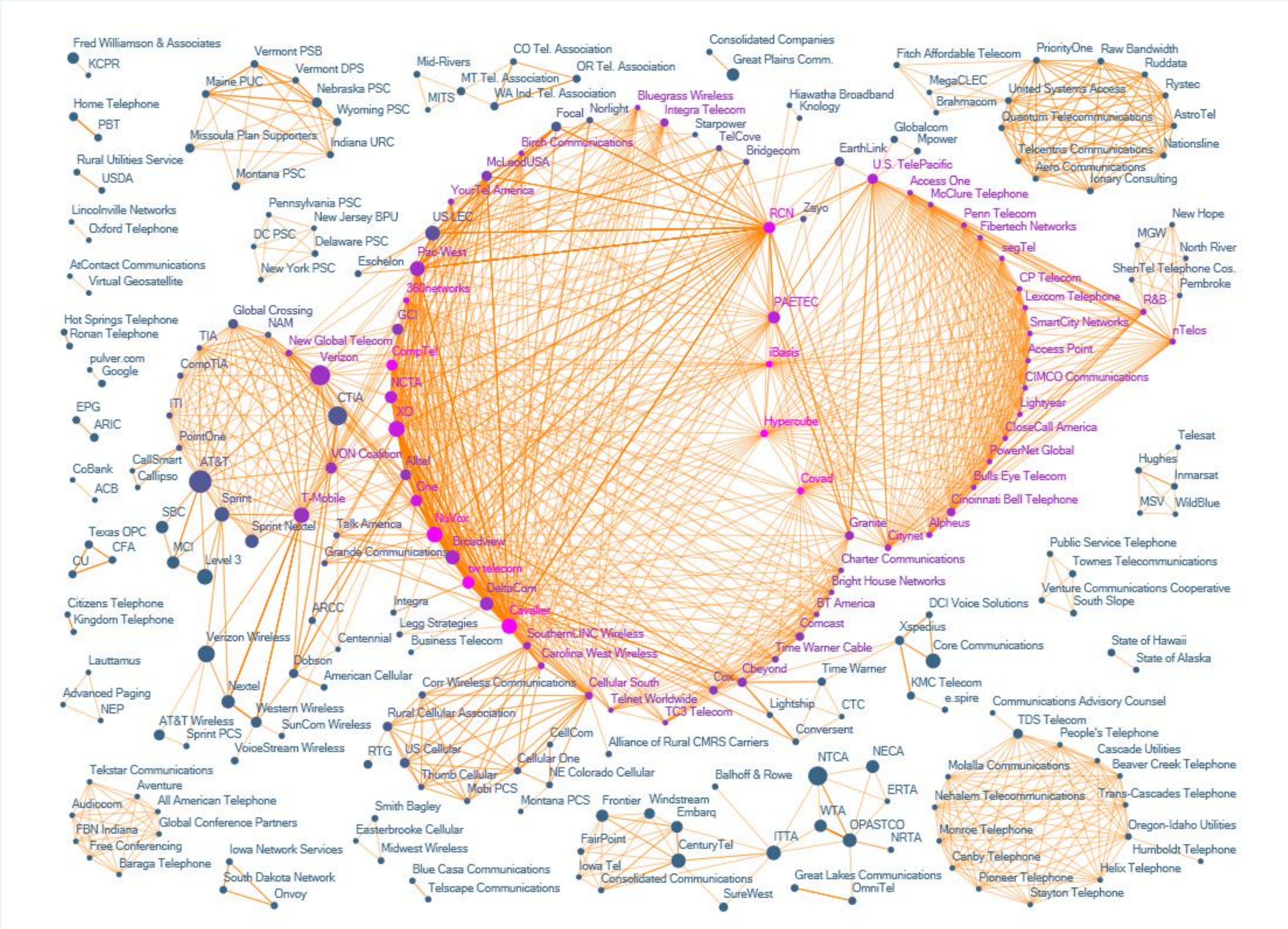
$V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

$E = \{ 1\text{-}2, 1\text{-}3, 2\text{-}3, 2\text{-}4, 2\text{-}5, 3\text{-}5, 3\text{-}7, 3\text{-}8, 4\text{-}5, 5\text{-}6, 7\text{-}8 \}$

$\mathrm{m} = 11$, $n = 8$

Grafos en todas partes

La evolución de las coaliciones de presión de la FCC



"[The Evolution of FCC Lobbying Coalitions](#)" por Pierre de Vries en JoSS Visualization Symposium 2010

Estudio cardíaco de Framingham

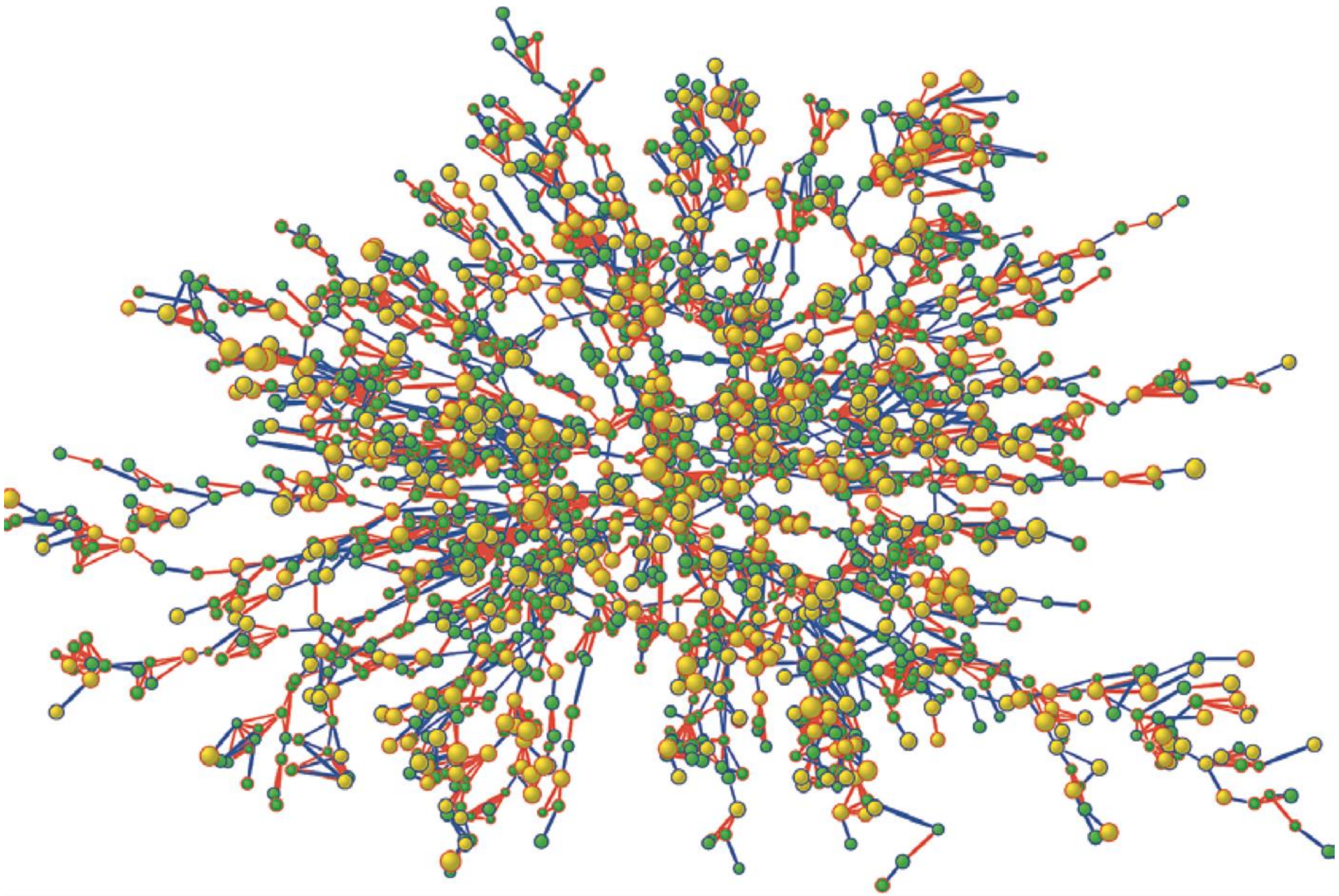


Figure 1. Largest Connected Subcomponent of the Social Network in the Framingham Heart Study in the Year 2000.
Each circle (node) represents one person in the data set. There are 2200 persons in this subcomponent of the social network. Circles with red borders denote women, and circles with blue borders denote men. The size of each circle is proportional to the person's body-mass index. The interior color of the circles indicates the person's obesity status: yellow denotes an obese person (body-mass index, ≥30) and green denotes a nonobese person. The colors of the ties between the nodes indicate the relationship between them: purple denotes a friendship or marital tie and orange denotes a familial tie.

"The Spread of Obesity in a Large Social Network over 32 Years", de Christakis y Fowler, en New England Journal of Medicine, 2007.

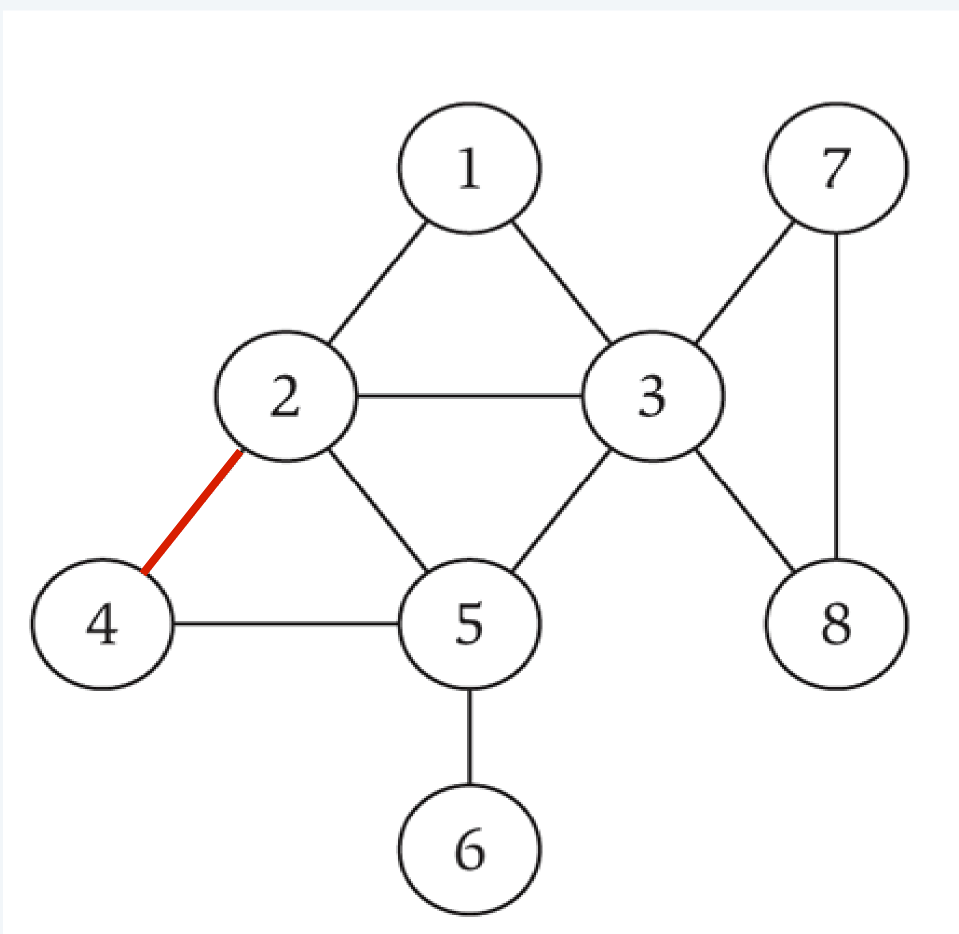
Algunas aplicaciones de los grafos

grafo	nodo	arista
comunicación	teléfono, ordenador	cable de fibra óptica
circuito	compuerta, registro, procesador	cable
mecánico	conjunta	varilla, viga, muelle
financiero	acciones, divisas	transacciones
transporte	intersección de calles, aeropuerto	autopista, ruta aérea
internet	red de clase C	conexión
juego	posición en el consejo	movimiento legal
relación social	persona, actor	amistad, reparto de películas
red neuronal	neurona	sinapsis
red de proteínas	proteína	interacción proteína-proteína
molécula	átomo	bono

Representación de grafos: matriz de adyacencia

Matriz de adyacencia. Matriz de n *por* n con $A_{uv} = 1$ si (u, v) es una arista.

- Dos representaciones de cada arista.
- Espacio proporcional a n^2 .
- Comprobar si (u, v) es una arista requiere un tiempo $\Theta(1)$.
- La identificación de todas las aristas requiere un tiempo $\Theta(n^2)$.



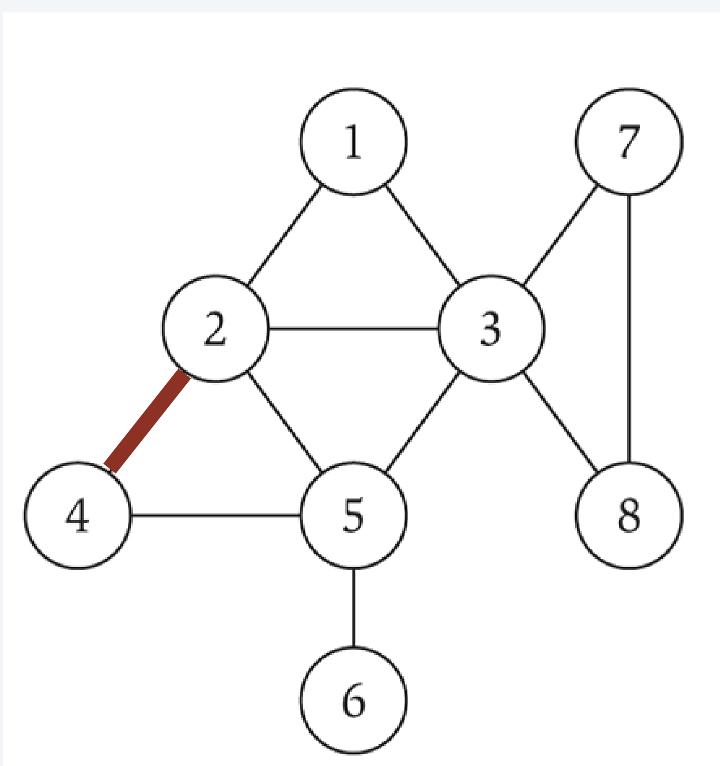
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	1	0	0	0	1	0

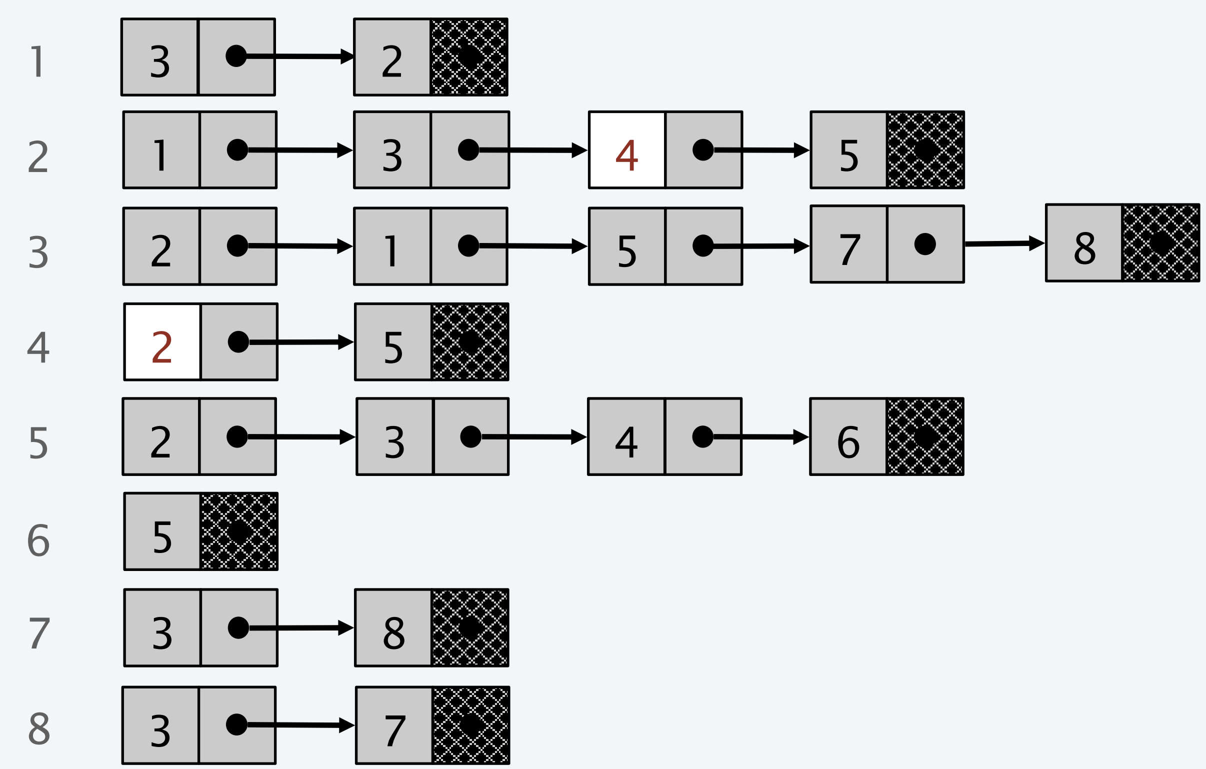
Representación gráfica: listas de adyacencia

Listas de adyacencia. Matriz de listas indexadas por nodos.

- Dos representaciones de cada arista.
- El espacio es $\Theta(m + n)$.
- Comprobar si (u, v) es una arista requiere un tiempo de $O(grado(u))$.
- Identificar todas las aristas requiere un tiempo $\Theta(m + n)$.

grado = número de vecinos de u



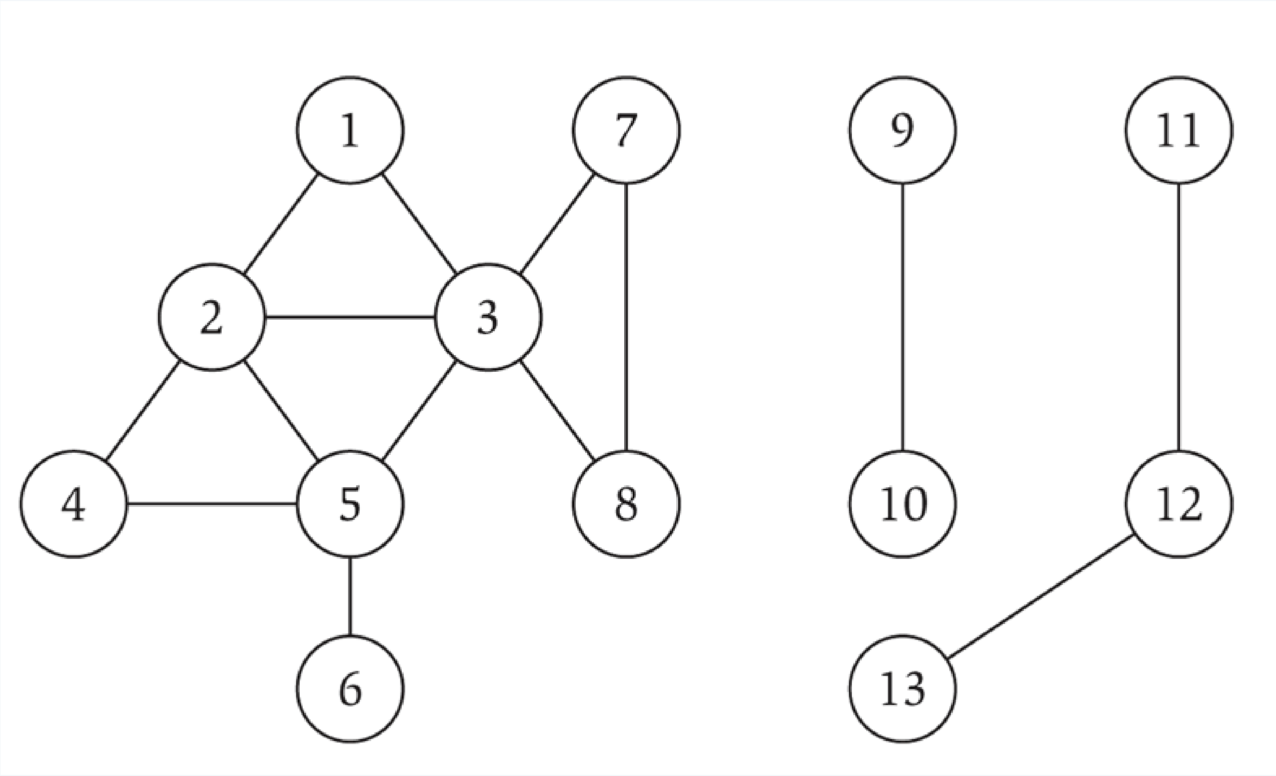


Caminos y conectividad

Def. Un camino en un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es una secuencia de nodos $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con la propiedad de que cada par consecutivo v_{i-1}, v_i está unido por una arista en E.

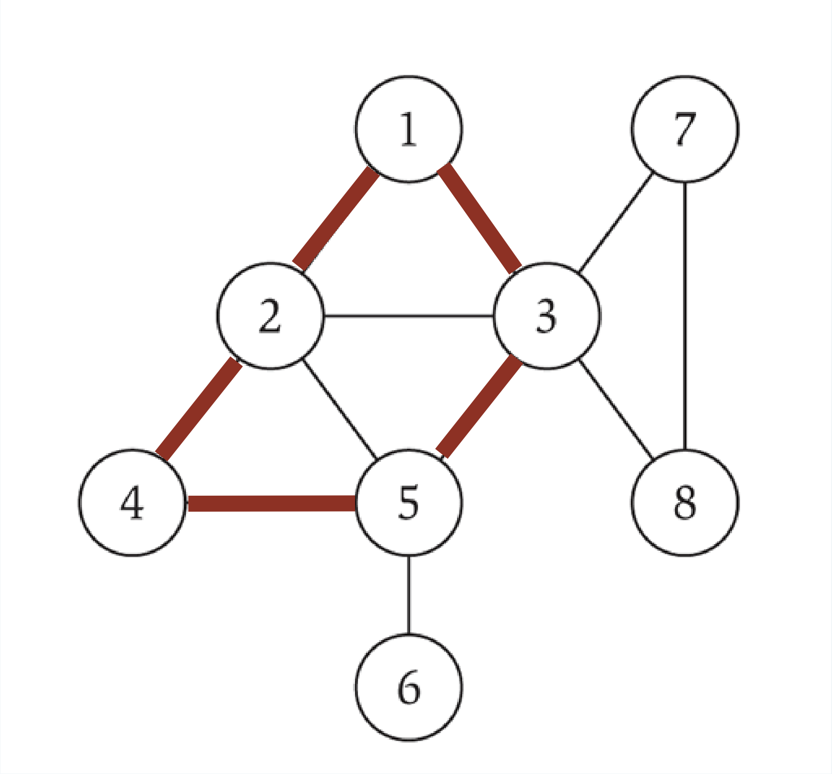
Def. Un camino es simple si todos los nodos son distintos.

Def. Un grafo no dirigido es conexo si para cada par de nodos u y v, existe un camino entre u y v.



Ciclos

Def. Un ciclo es un camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en el que $v_1 = v_k$, $k > 2$, y los primeros $k - 1$ nodos son todos distintos.

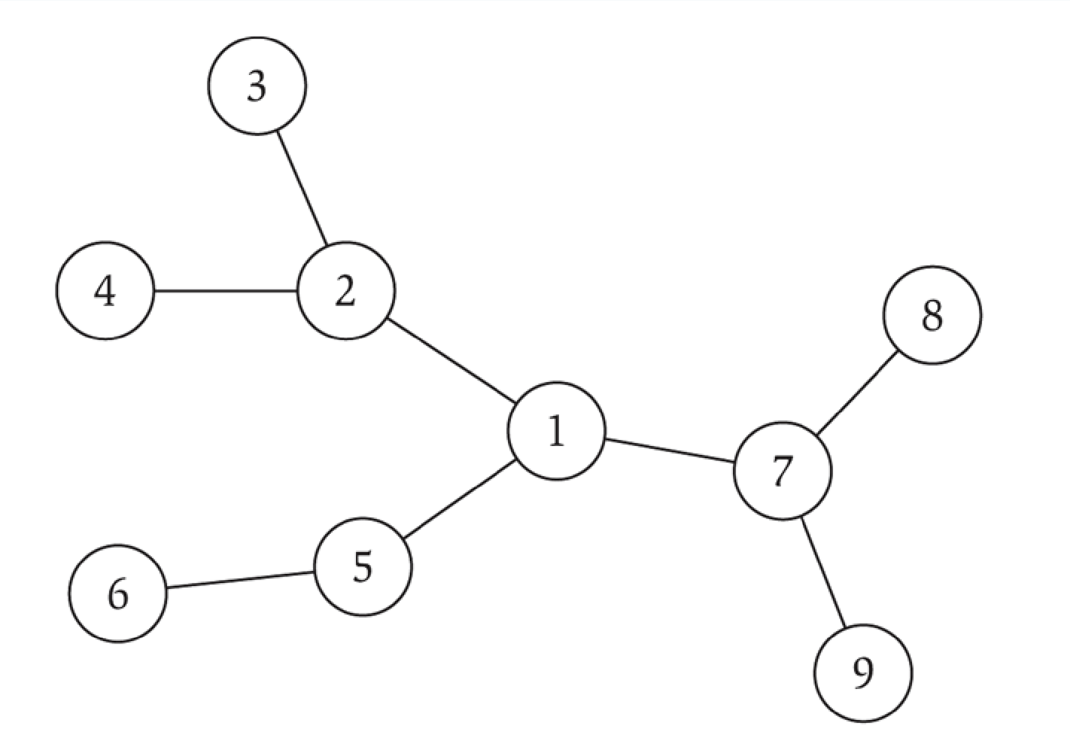


ciclo C = 1-2-4-5-3-1

Def. Un grafo no dirigido es un árbol si es conexo y no contiene un ciclo.

Teorema. Sea G un grafo no dirigido de n nodos. Dos de las siguientes afirmaciones implican la tercera:

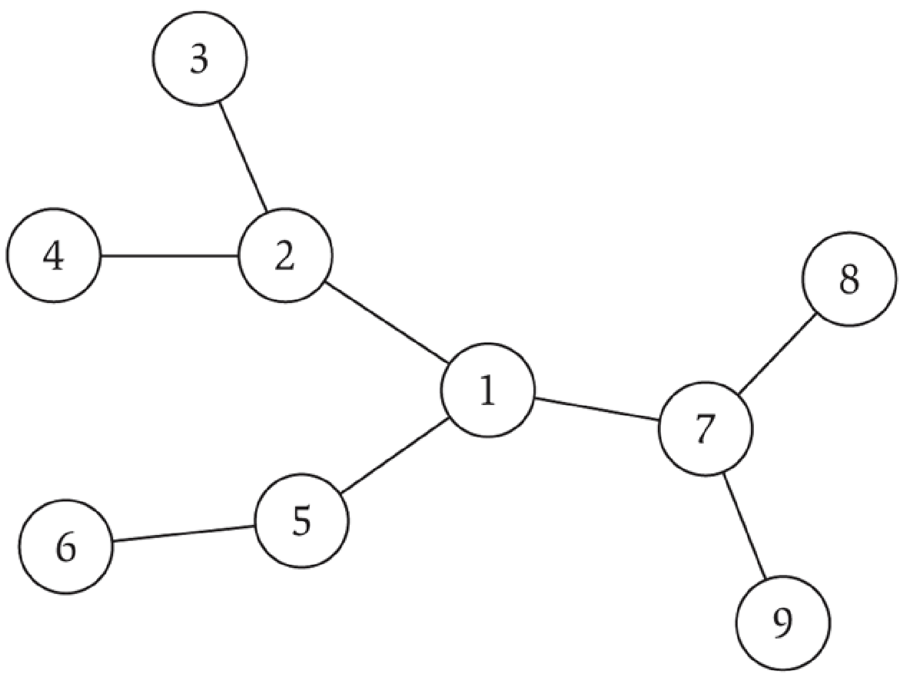
- G es conexo.
- G no contiene ningún ciclo.
- G tiene $n - 1$ aristas.



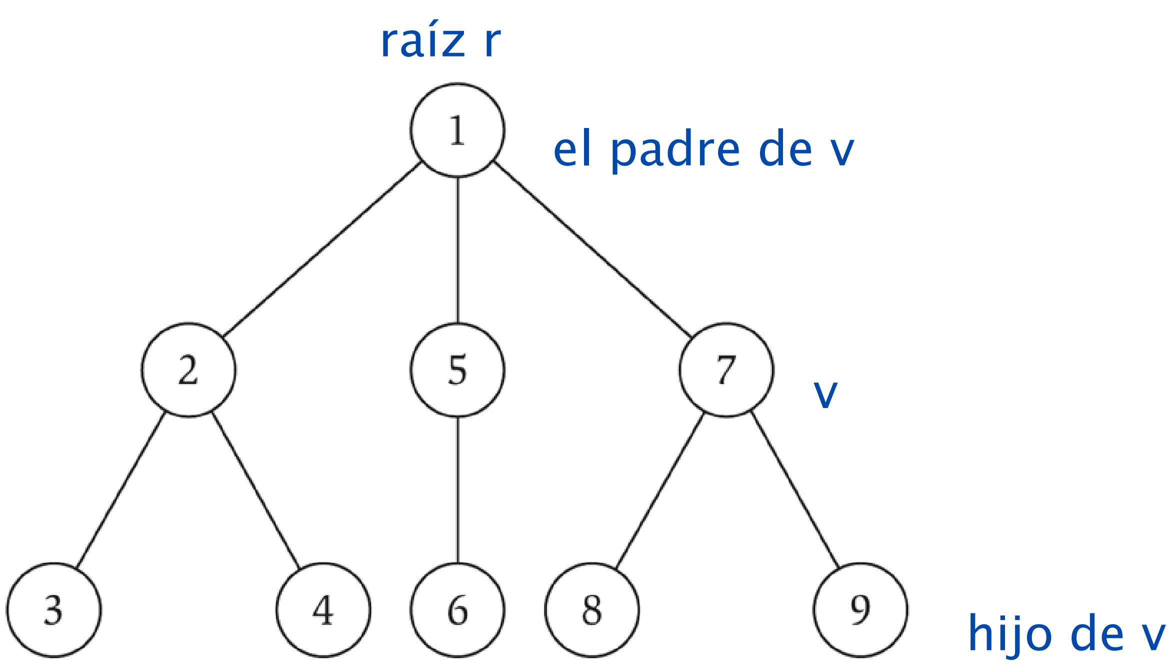
Árboles enraizados

Dado un árbol T, elige un nodo raíz r y orienta cada arista lejos de r.

Importancia. Estructura jerárquica de los modelos.



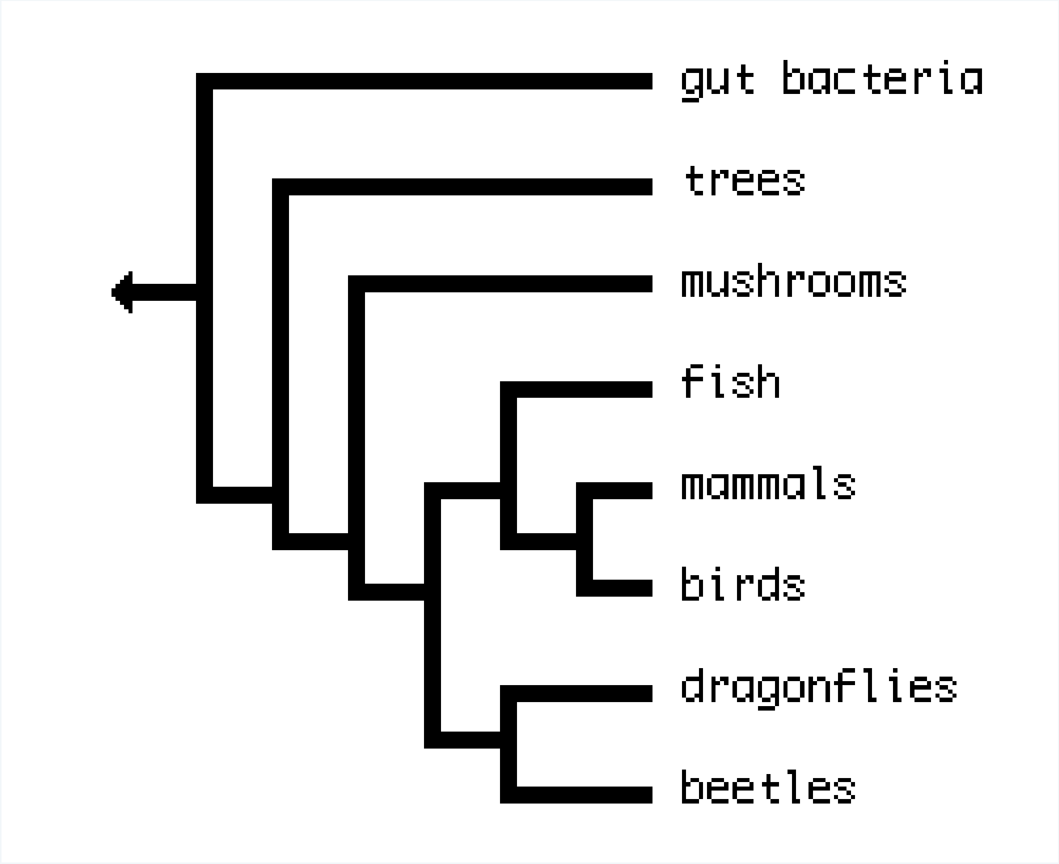
un árbol



el mismo árbol, enraizado en 1

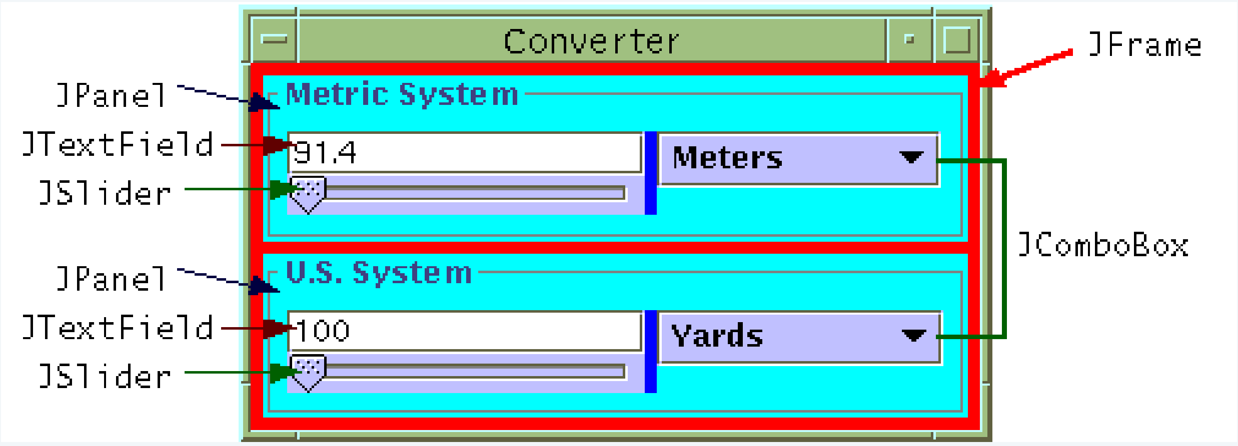
Árboles filogenéticos

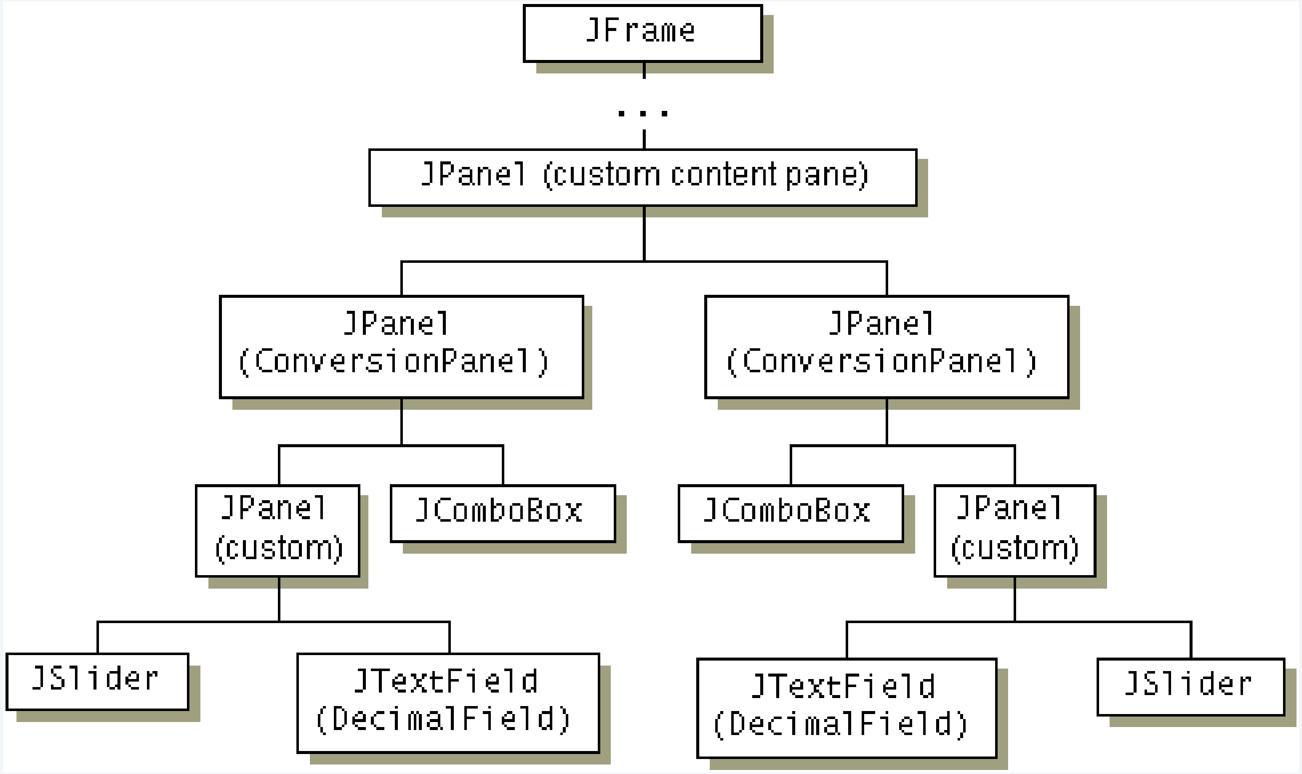
Describir la historia evolutiva de las especies.



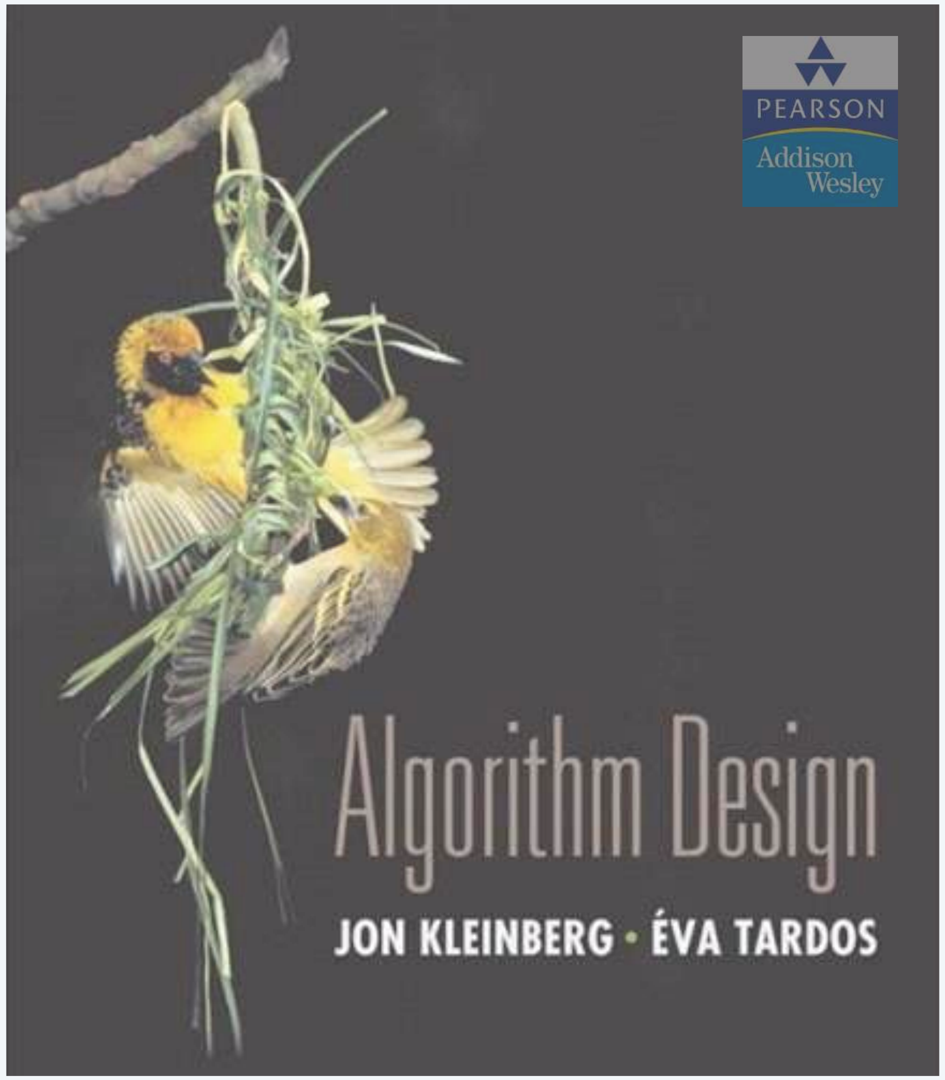
Jerarquía de contención GUI

Describir la organización de los widgets de la interfaz gráfica de usuario.





http://java.sun.com/docs/books/tutorial/uiswing/overview/anatomy.html



3. Gráficos

- *definiciones básicas y aplicaciones*
- *conectividad y recorrido de grafos*
- *comprobación de la bipartición*
- *conectividad en grafos dirigidos*
- *DAGs y ordenación topológica*

Conectividad

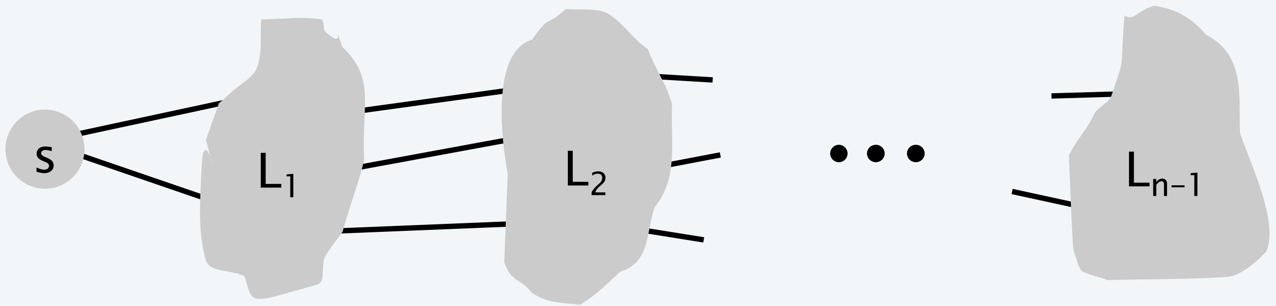
Problema de conectividad s-t. Dados dos nodos s y t, ¿existe un camino entre
s y t?

Problema del camino más corto s-t. Dados dos nodos s y t, ¿cuál es la longitud del camino más corto entre s y t ?

Aplicaciones…

- Recorrido de laberinto.
- El número de Kevin Bacon.
- El menor número de saltos en una red de comunicación.

Intuición BFS. Explorar desde s en todas las direcciones posibles, añadiendo nodos de una "capa" cada vez.



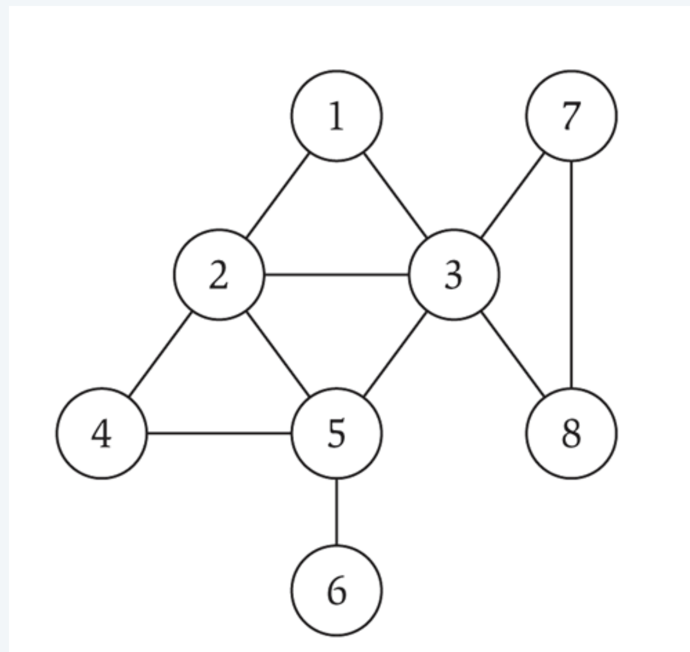
Algoritmo BFS.

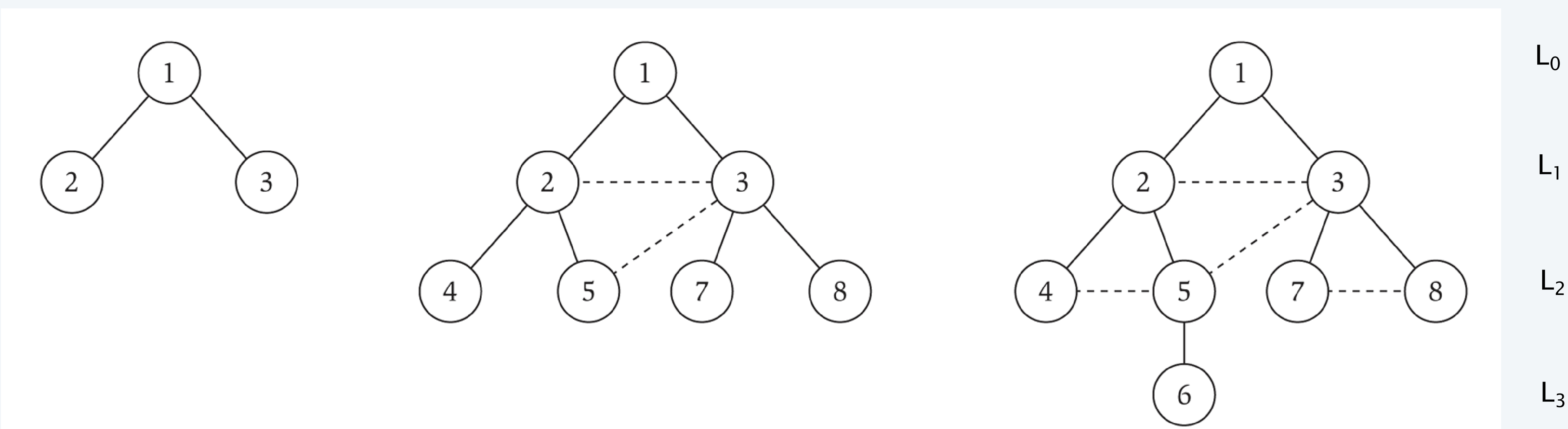
- $L_0 = \{ s \}$.
- L_1 = todos los vecinos de L_0 .
- L_2 = todos los nodos que no pertenecen a L_0 o L_1 , y que tienen una arista a un nodo en L_1.
- L_{i+1} = todos los nodos que no pertenecen a una capa anterior, y que tienen una arista a un nodo en L_i .

Teorema. Para cada i, L_i consta de todos los nodos a una distancia exactamente i de s. Existe un camino de s a t si t aparece en alguna capa.

Búsqueda exhaustiva

Propiedad. Sea T un árbol BFS de $G = (V, E)$, y sea (x, y) una arista de G. Entonces, los niveles de x e y difieren como máximo en 1.





(a) (b) (c)

Búsqueda exhaustiva: análisis

Teorema. La implementación anterior de BFS se ejecuta en tiempo $O(m + n)$ si el grafo viene dado por su representación de adyacencia.

Pf.

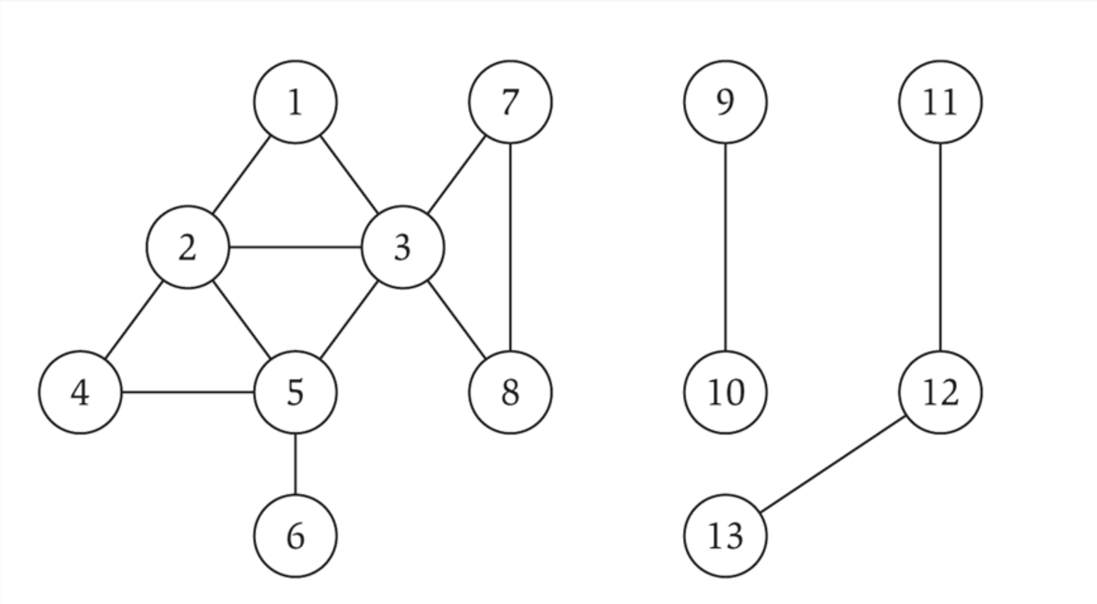
- Es fácil demostrar un tiempo de ejecución de $O(n^2)$:
  - como máximo n listas $L[i]$
  - cada nodo aparece como máximo en una lista; el bucle for se ejecuta $\leq n$ veces
  - cuando consideramos el nodo u, hay $\leq n$ aristas incidentes (u, v), y gastamos $O(1)$ en procesar cada arista.

- En realidad se ejecuta en tiempo $O(m + n)$:
  - cuando consideramos el nodo u, hay $grado(u)$ aristas incidentes (u, v)
  - el tiempo total de procesamiento de aristas es $\Sigma_{u \in V} \; grado(u) = 2m$. ▪

cada arista (u, v) se cuenta exactamente dos veces
en suma: una vez en grado(u) y una vez en grado(v)

Componente conectado

Componente conexa. Encuentra todos los nodos alcanzables desde s.



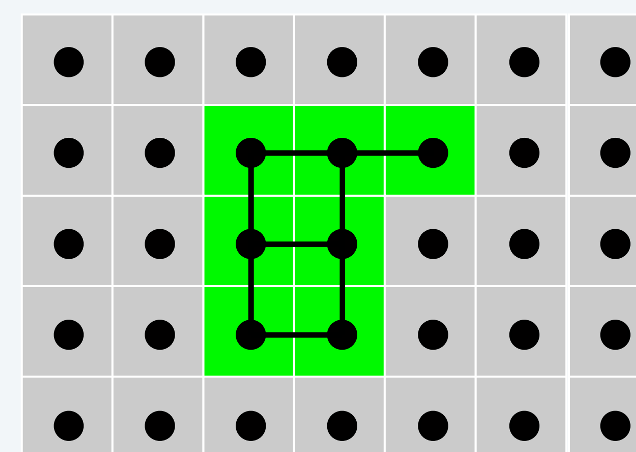
Componente conexa que contiene al nodo $1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$.

Relleno de inundación

Relleno por inundación. Dado un píxel verde lima en una imagen, cambia a azul el color de toda la mancha de píxeles lima vecinos.

- Nodo: píxel.
- Borde: dos píxeles limítrofes.
- Blob: componente conectado de píxeles verde lima.

recolor lime green blob to blue

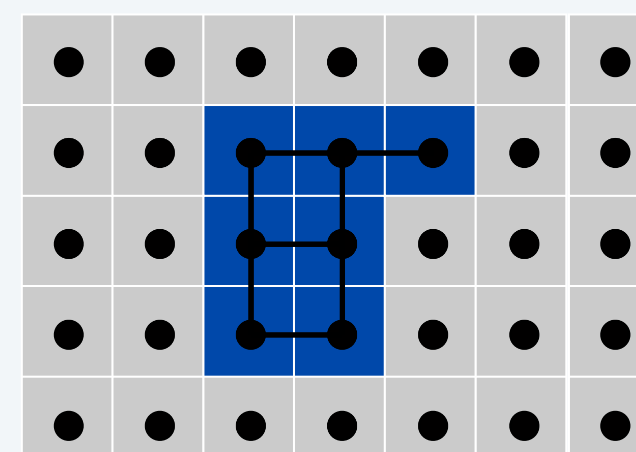


Relleno de inundación

Relleno por inundación. Dado un píxel verde lima en una imagen, cambia a azul el color de toda la mancha de píxeles lima vecinos.

- Nodo: píxel.
- Borde: dos píxeles limítrofes.
- Blob: componente conectado de píxeles verde lima.

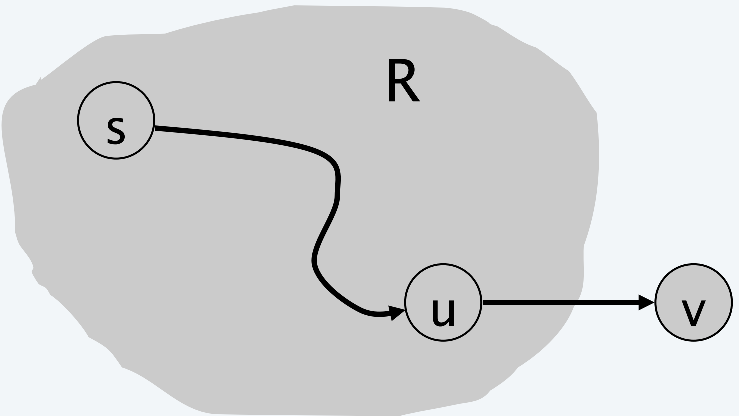
recolor lime green blob to blue



Componente conexa

Componente conexa. Encuentra todos los nodos alcanzables desde s.

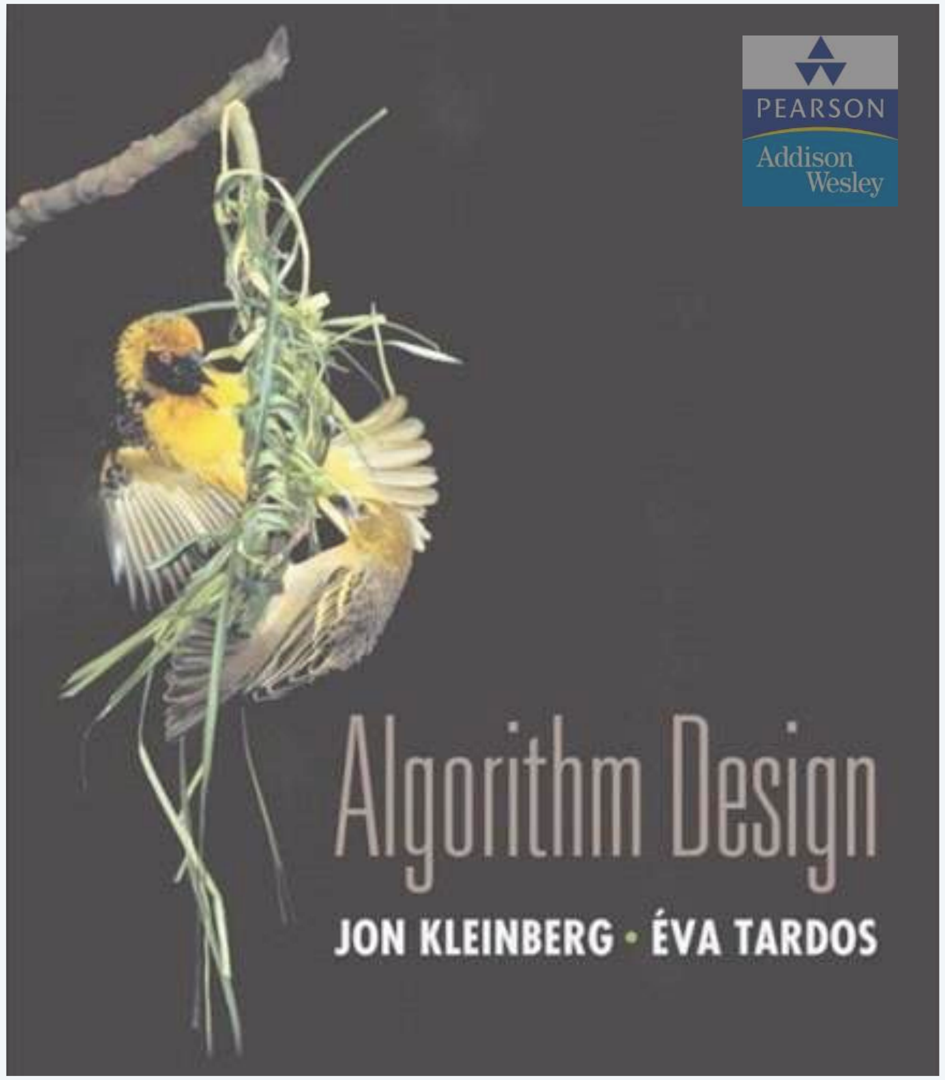
```
R will consist of nodes to which s has a path
Initially R = {s}
While there is an edge (u, v) where u ∈ R and v ∉ R
  Add v to R
Endwhile
```



es seguro añadir v

Teorema. Al terminar, R es la componente conexa que contiene a s.

- BFS = explorar por orden de distancia desde s.
- DFS = explorar de otra manera.



3. GRÁFICOS

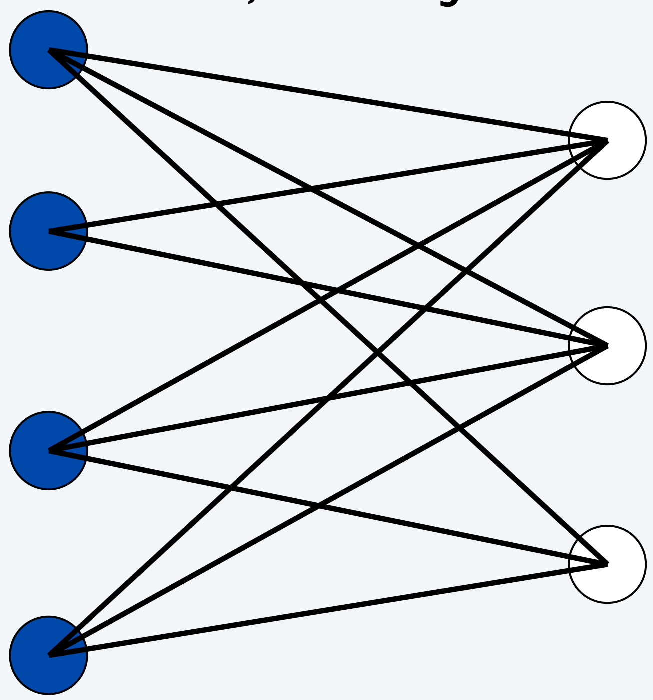
- *definiciones básicas y aplicaciones*
- *conectividad de grafos y recorrido de grafos*
- *comprobación de la bipartición*
- *conectividad en grafos dirigidos*
- *DAGs y ordenación topológica*

Grafos bipartitos

Def. Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es bipartito si los nodos pueden ser de color azul o blanco de forma que cada arista tiene un extremo blanco y otro azul.

Aplicaciones.

- Emparejamiento estable: médicos residentes = azul, hospitales = blanco.
- Programación: máquinas = azul, trabajos = blanco.



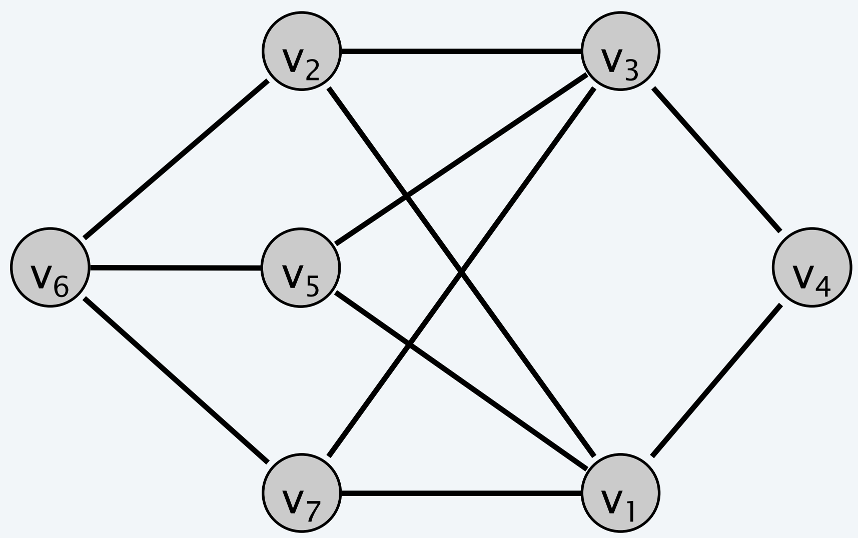
un grafo bipartito

Pruebas de bipartición

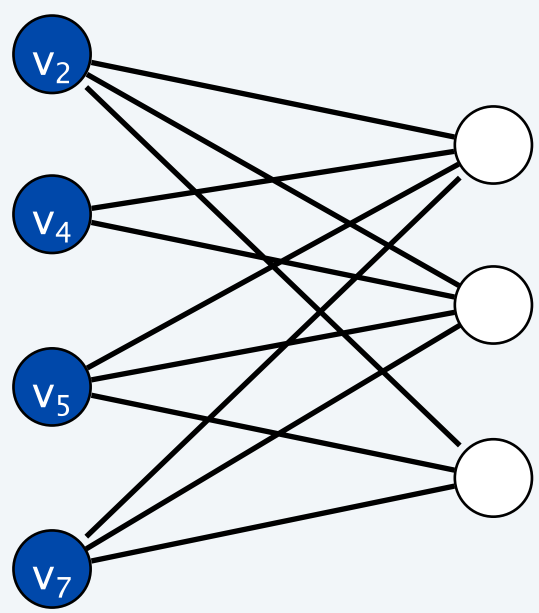
Muchos problemas de grafos son:

- Más fáciles si el grafo subyacente es bipartito (emparejamiento).
- Tratables si el grafo subyacente es bipartito (conjunto independiente).

Antes de intentar diseñar un algoritmo, debemos comprender la estructura de los grafos bipartitos.



un grafo bipartito G

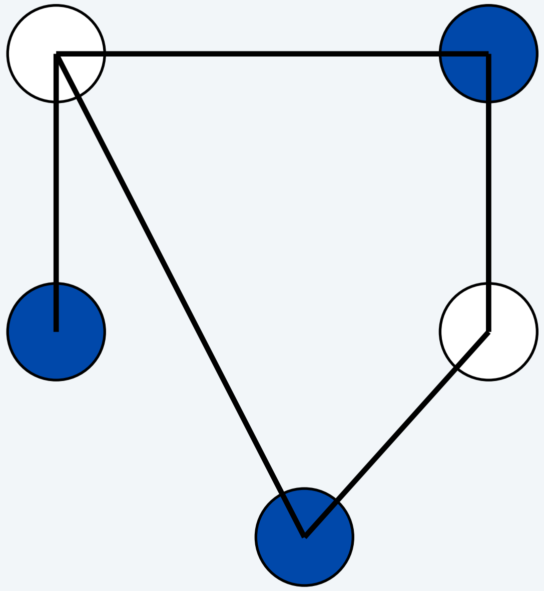


otro dibujo de G

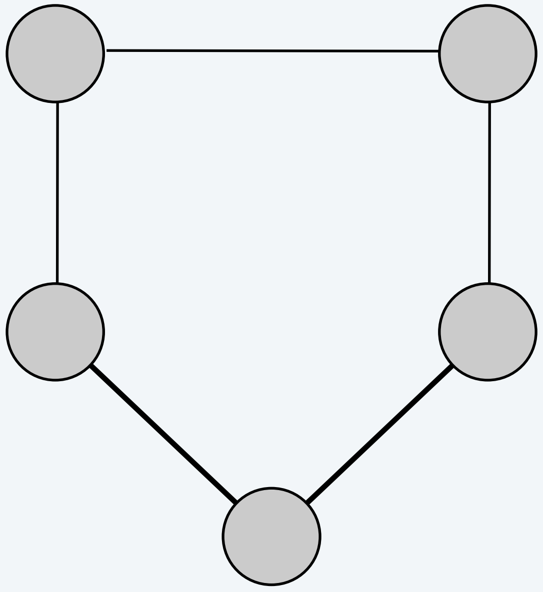
Un obstáculo para la bipartición

Lema. Si un grafo G es bipartito, no puede contener un ciclo de longitud impar.

Dem. No es posible colorear 2 veces el ciclo de longitud impar, y mucho menos G.



bipartito
(2-colorable)

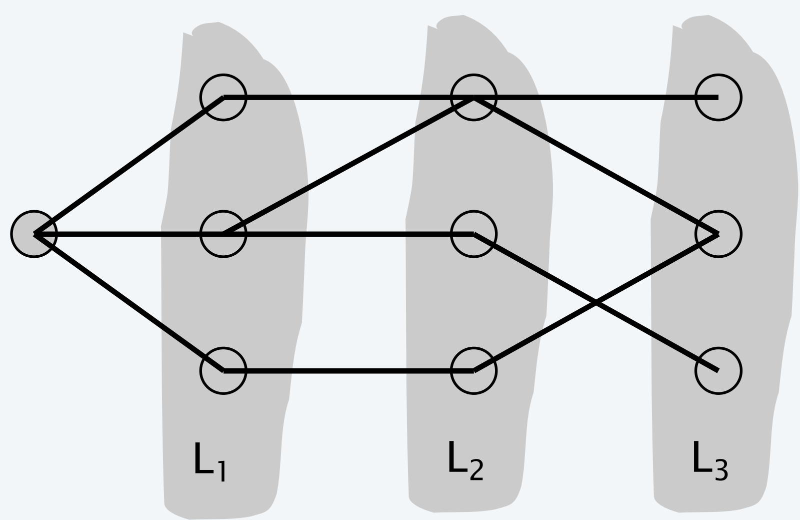


no bipartito
(no bicolorable)

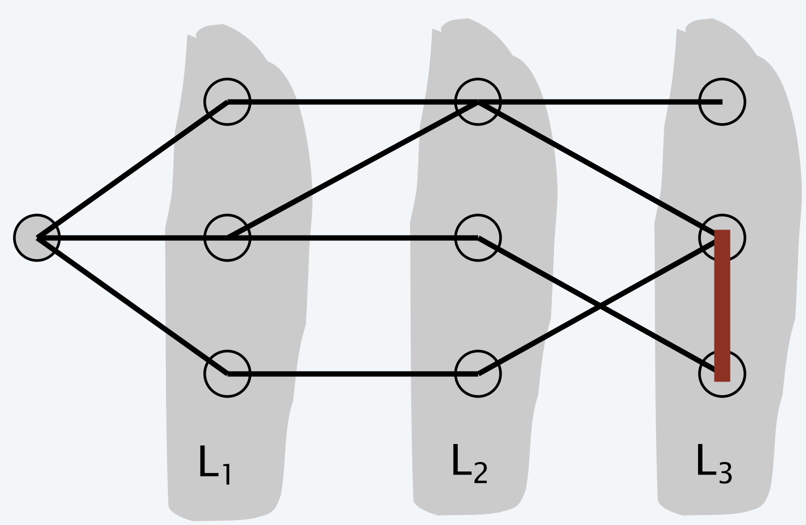
Lemma. Sea G un grafo conexo, y sea L_0 , ..., L_k las capas producidas por BFS comenzando en el nodo s. Se cumple exactamente una de las siguientes condiciones.

(i) Ninguna arista de G une dos nodos de la misma capa, y G es bipartito.

(ii) Una arista de G une dos nodos de la misma capa, y G contiene un ciclo impar (y por lo tanto no es bipartito).



Caso (i)



Caso (ii)

Grafos bipartitos

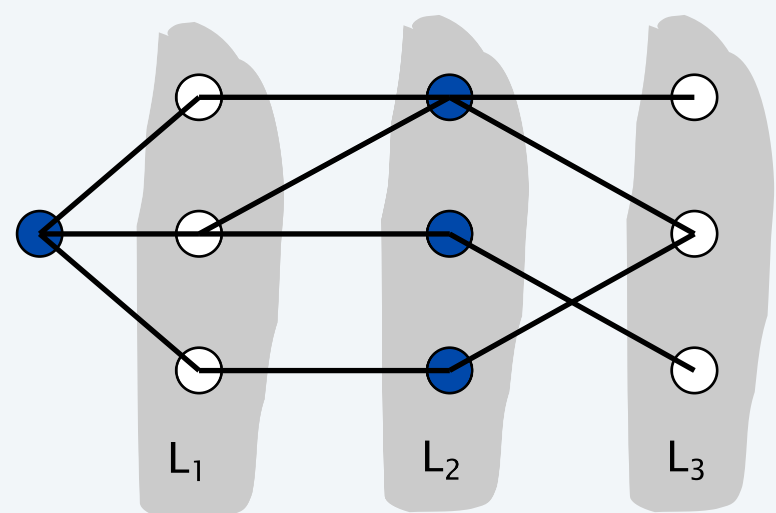
Lemma. Sea G un grafo conexo, y sea L_0 , …, L_k las capas producidas por BFS comenzando en el nodo s. Se cumple exactamente una de las siguientes condiciones.

(i) Ninguna arista de G une dos nodos de la misma capa, y G es bipartito.

(ii) Una arista de G une dos nodos de la misma capa, y G contiene un ciclo impar (y por lo tanto no es bipartito).

Dem. (i)

- Supongamos que ninguna arista une dos nodos de la misma capa.
- Por la propiedad BFS, cada arista une dos nodos en niveles adyacentes.
- Bipartición: blanco = nodos en niveles impares, azul = nodos en niveles pares.



Caso (i)

Grafos bipartitos

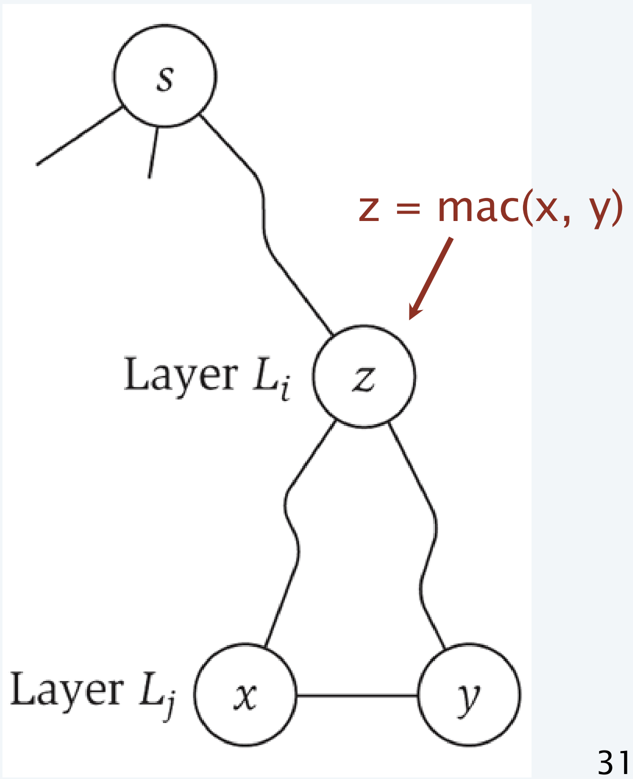
Lemma. Sea G un grafo conexo, y sea L_0 , …, L_k las capas producidas por BFS comenzando en el nodo s. Se cumple exactamente una de las siguientes condiciones.

(i) Ninguna arista de G une dos nodos de la misma capa, y G es bipartito.

(ii) Una arista de G une dos nodos de la misma capa, y G contiene un ciclo impar (y por lo tanto no es bipartito).

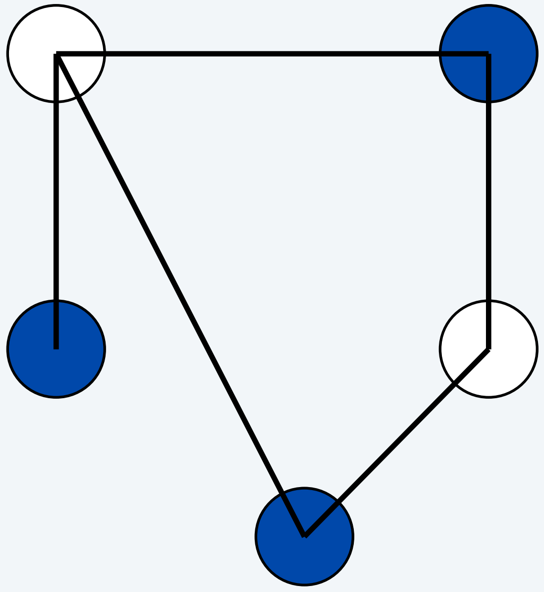
Pf. (ii)

- Supongamos que (x, y) es una arista con x, y en el mismo nivel L_j .
- Sea $z = mac(x, y)$ = mínimo ancestro común.
- Sea L_i el nivel que contiene a z.
- Considere un ciclo que toma la arista de x a y, luego el camino de y a z, luego el camino de z a x.
- Su longitud es $\underbrace{1}_{\text{(x, y)}} + \underbrace{(j - i)}_{\text{camino de y a z}} + \underbrace{(j - i)}_{\text{camino de z a x}}$, que es impar. ▪

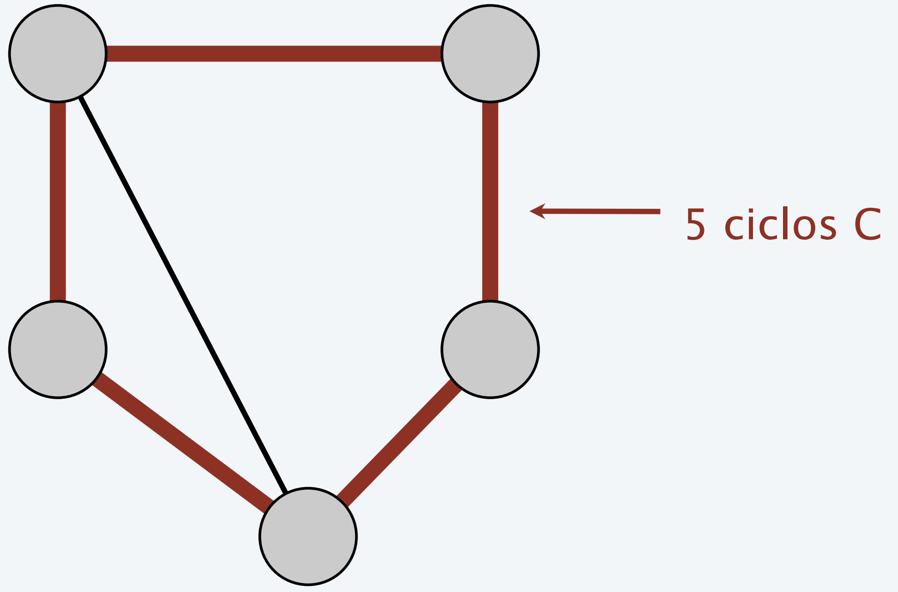


El único obstáculo al bipartidismo

Corolario. Un grafo G es bipartito si y solo si no contiene ningún ciclo de longitud impar.



bipartito
(2-colorable)



no bipartito
(no bicolorable)