Matemática Discreta 1

Segundo Parcial

Martes 27 de noviembre de 2018

El parcial dura tres horas, cada ejercicio múltiple opción vale cinco puntos y no se restan puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
C	B	B	B	C	B

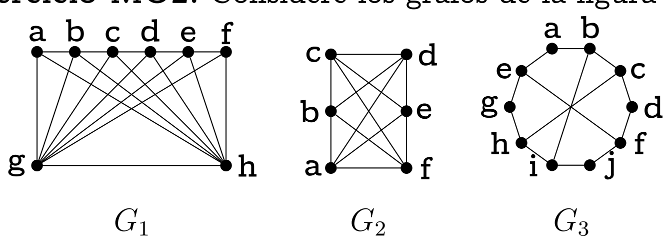
Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio MO1: Contar la cantidad N de relaciones antisimétricas y simétricas que hay sobre un conjunto con cinco elementos.

A) $N = 0$ B) $N = 1$ C) $N = 2^5$ D) $N = 3^5$

Resolución: Si R es simétrica entonces xRy implica yRx. Pero al ser antisimétrica eso implica $x = y$, de donde los únicos pares posibles son de la forma xRx. Como hay cinco de esos pares para elegir si pertenecen o no a la relación, entonces hay 2^5 posibles relaciones.

Ejercicio MO2: Considere los grafos de la figura



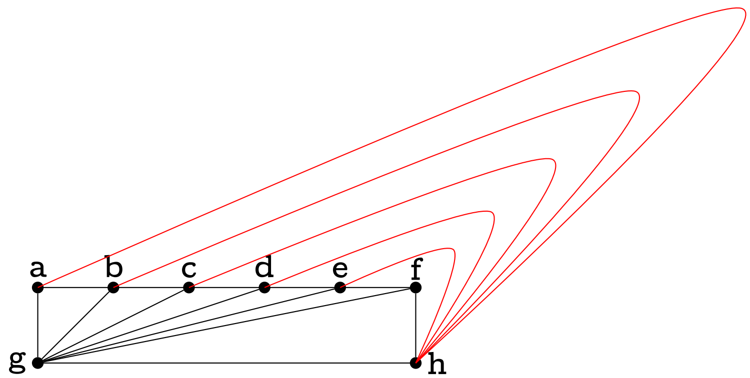
A) Los tres son planos.

B) Solo G_1 y G_2 son planos.

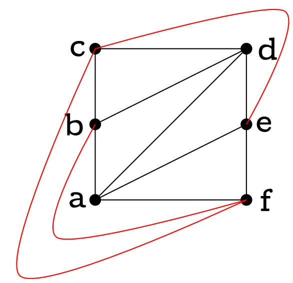
C) Solo G_1 es plano.

D) Ninguno de los tres es planos.

Resolución: Los primeros dos son planos, como muestras las representaciones a continuación:

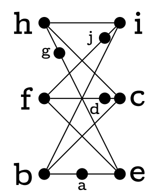


G_1



G_2

Por otra parte G_3 es homoemorfo a $K_{3,3}$, como muestra la figura:



Ejercicio MO3: ¿Cuántas relaciones de equivalencia sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ hay tales que la clase de equivalencia del 1 tenga más elementos que la del 2 y la del 2 más que la del 3?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18

Resolución: Dadas las restricciones y como hay en total siete elementos, los posibles cardinales $|[x]|$ para la clase $[x]$ de $x = 1, 2, 3$ son:

$$(|[3]|, |[2]|, |[1]|) = (1, 2, 3) \text{ y } (|[3]|, |[2]|, |[1]|) = (1, 2, 4)$$

En cuyos casos los conjuntos cocientes serán de la forma:

$$\{\{3\}, \{2, x\}, \{1, y, z\}, \{t\}\} \text{ y } \{\{3\}, \{2, x\}, \{1, y, z, t\}\}$$

Para el primer caso hay 4 formas de elegir x, $\binom{3}{2} = 3$ formas de elegir $\{y, z\}$ y una sola forma de elegir t (es el elemento que queda). En total son $4 \times 3 = 12$ formas.

Para el segundo caso hay 4 formas de elegir x y $\binom{3}{3} = 1$ forma de elegir $\{y, z, t\}$ (son los elementos que queda). En total son 4 formas.

Por la regla de la suma, el total será $12 + 4 = 16$.

Ejercicio MO4: ¿Cuántos subgrafos isomorfos a $K_{1,3}$ tiene $K_{3,4}$?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18

Resolución: Cada vértice de $K_{3,4}$ puede oficiar del vértice de grado 3 de $K_{1,3}$. Si es uno de los cuatro vértices de $K_{3,4}$ de grado 3, una vez elegido dicho vértice, los demás vértices quedan determinados. Así que por ese lado tenemos 4 posibilidades.

Si es uno de los tres vértices de $K_{3,4}$ de grado 4, una vez elegido dicho vértice, tenemos cuatro posibilidades para elegir los otros tres vértices. Así que por ese lado tenemos $3 \times 4 = 12$ posibilidades.

En total serán $4 + 12 = 16$ posibilidades.

Ejercicio MO5: Dado $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular, conexo y sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G?

A) **No es posible deducir el número de regiones con ésta información.**

B) 2

C) 10

D) 14

Resolución: Por la fórmula de Euler, si r es la cantidad de regiones, tenemos:

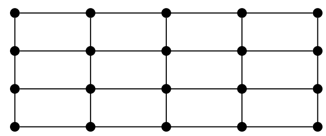
$$|V| - 16 + r = 2.$$

Por otro lado, la suma de los grados es dos veces la cantidad de aristas así que

$$2|E| = 32 = \sum_{v \in V} gr(v) = \sum_{v \in V} 4 = 4|V|$$

de donde $|V| = 32/4 = 8$ y $r = 2 + 16 - 8 = 10$.

Ejercicio MO6: El grafo de la figura:



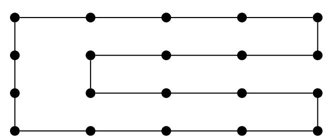
A) Contiene algún circuito euleriano.

B) Contiene algún ciclo hamiltoniano.

C) No tiene recorridos eulerianos ni caminos hamiltonianos.

D) Tiene algún camino hamiltoniano, pero ningún ciclo hamiltoniano.

Resolución: El grafo tiene más de dos vértices con grado 3 por lo tanto no posee ni circuito ni recorridos eulerianos. EL grafo posee el siguiente ciclo hamiltoniano, por lo tanto también posee un camino hamiltoniano:



Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1: (10 ptos) Consideramos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la relación definida $\prec$ por $(a, b) \prec (c, d)$ si $a \leq c$, $b \geq d$ y $b - d$ par.

a) Probar que $\prec$ es una relación de orden.

b) Probar que $\prec$ no es un orden total.

c) Dibujar un diagrama de Hasse para $\prec$ restringida a $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{6, 7, 8\}$.

Resolución: a) Reflexiva: para todo (a, b) $a \leq a$, $b \leq b$ y $b - b = 0$ par.

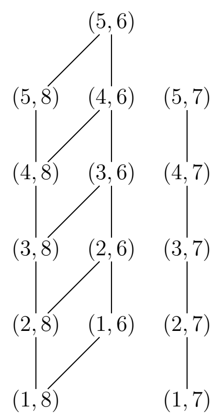
Antisimétrica: $(a, b) \prec (c, d) \prec (a, b)$ entonces $a \leq c$ y $b \geq d$ y $b - d$ par y $c \leq a$ y

$d \geq b$ y $d - d$ par. De $a \leq c \leq a$ deducimos $a = c$, de $b \geq d \geq b$ deducimos $b = d$, por lo que $(a, b) = (c, d)$.

Transitiva: $(a, b) \prec (c, d) \prec (e, f)$ entonces $a \leq c$ y $b \geq d$ y $b - d$ par y $c \leq e$ y $d \geq f$ y $d - f$ par. De $a \leq c \leq e$ deducimos $a \leq e$, de $b \geq d \geq f$ deducimos $b \geq f$, y de $b - d = 2k$ y $d - f = 2h$, sumando deducimos $b - d + d - f = b - f = 2(k + h)$ par, de donde $(a, b) \prec (e, f)$.

b) Los pares $(1, 1)$ y $(1, 2)$ no están relacionados, ya que ni $1 - 2$ ni $2 - 1$ son pares.

c)



Ejercicio de Desarrollo 2: (10 ptos)

a) Definir circuito y recorrido euleriano

b) Enunciar el teorema de Euler que da una condición necesaria y suficiente para la existencia de un circuito euleriano.

c) Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente para le existencia de un recorrido euleriano. *Sugerencia:* usar la parte anterior.

Resolución: Ver Grimaldi: definición 11.15, Teorema 11.3, y Corolario 11.2.

Ejercicio de Desarrollo 3: (10 ptos)

a) Demostrar que para todo grafo conexo G, si e es una arista tal que $G - e$ es disconexo, entonces $G - e$ tiene exactamente dos componentes conexas.

b) Definir árbol.

c) Demostrar que para todo árbol $T = (V, E)$, se cumple que $|V| = |E| + 1$.

Resolución:

a) Sea $e = xy$, demostraremos que las dos componentes conexas de $G - e$ corresponden, una a x y otra a y. Sea v en G un vértices cualquiera, basta demostrar que si no existe un camino de v a x entonces existe un camino de v a y. Sea P un camino entre v y y en G, que existe por ser G conexo. Dicho camino no puede incluir la arista e pues sino, tendríamos un camino de v a x contra lo supuesto, por lo tanto P también es un camino en $G - e$ como queríamos demostrar.

b) un árbol es un grafo conexo acíclico.

c) Por inducción fuerte en $|E|$. Si $E| = 0$, entonces $T = K_1$ y $|V| = 1$, por lo que se cumple. Asumimos el resultado para $0 \leq |E| < m$, queremos demostrarlo para m. Sea $e = xy$ una arista cualquiera de T, entonces $T - e$ es disconexo, pues si no lo fuera existiría un camino simple entre x e y en $T - e$, que junto a la arista e formaría un ciclo en T, contradiciendo que T es un árbol. Entonces por la parte b), $T - e$ tiene dos componentes conexas T_1 y T_2, que serán acíclicas por ser subgrafos de T acíclico, por lo tanto, son árboles. Como tienen menos aristas que T, podemos aplicar la hipótesis inductiva a ambos y deducir que $|V(T_i)| = |E(T_i)| + 1$, para $i = 1, 2$. Sumando y observando que $|V(T_1)| + |V(T_2)| = |V|$ y $|V(T_1)| + |E(T_2)| = |E| - 1$, obtenemos $|V| = |E| - 1 + 2 = |E| + 1$, como queríamos demostrar.